

**DIE CASIMIR-OPERATOREN
DER HALBEINFACHEN LIE-ALGEBREN**

Fazlollah Berdjis

1970



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552316_0087

DIE CASIMIR-OPERATOREN DER HALBEINFACHEN LIE-ALGEBREN

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades des

Fachbereichs Physik der

Ludwig-Maximilians-Universität zu München



vorgelegt von

Fazlollah Berdjis

München, Februar 1977



1. *Berichterstatter: Prof. Dr. H.J. Meister*
2. *Berichterstatter: Prof. Dr. G. Süßmann*

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Mai 1978

Zusammenfassung

Wir zeigen, daß das Zentrum $Z(L)$ der universellen einhüllenden Algebra $U(L)$ einer endlichdimensionalen komplexen oder reellen halbeinfachen Lie-Algebra L , dessen Elemente wir auch Casimir-Elemente nennen, von $1_{U(L)}$ und einer 1-elementigen und algebraisch unabhängigen Menge erzeugt wird, wobei 1 der Rang von L ist. Ferner führen wir die Gewinnung einer Erzeugendenmenge von $Z(L)$ auf das Aufsuchen von Erzeugendenmengen der Zentren der universellen einhüllenden Algebren derjenigen einfachen Lie-Algebren zurück, die in der direkten Lie-Algebra-Zerlegung von L nach einfachen Lie-Algebren vorkommen. Den Aussagen über $Z(L)$ analoge Sätze beweisen wir auch über die Invariantenalgebra $S_{\text{Int}}(L)$ der zu L adjungierten Gruppe. Es wird ein Verfahren angegeben, mit dem gewisse Casimir-Elemente und Elemente von $S_{\text{Int}}(L)$ berechnet werden können. Ferner untersuchen wir die Beziehung zwischen den Casimir-Elementen einer beliebigen komplexen Lie-Algebra L und den Casimir-Elementen ihrer reellen Formen $L_{\mathbb{U}}$ und ihrer Reellifizierung $L^{\mathbb{R}}$. Wir geben Verfahren an, mit deren Hilfe man aus Erzeugendenmengen der Casimir-Elemente von L entsprechende Mengen von $L_{\mathbb{U}}$ bzw. $L^{\mathbb{R}}$ berechnen kann und umgekehrt. Wir geben ferner eine leicht nachprüfbare hinreichende Bedingung dafür an, daß eine Untermenge des Zentrums $Z(L)$ der universellen einhüllenden Algebra $U(L)$ einer endlichdimensionalen komplexen halbeinfachen Lie-Algebra L algebraisch unabhängig ist und zusammen mit $1_{U(L)}$ ganz $Z(L)$ erzeugt. Schließlich geben wir algebraisch unabhängige Erzeugendenmengen der Zentren der universellen einhüllenden Algebren komplexer bzw. reeller einfacher Lie-Algebren aus den Isomorphieklassen A_1 , B_1 , C_1 , D_1 und G_2 bzw. aus den Isomorphieklassen der dazugehörigen reellen Formen explizit an.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
§ 1 Die Existenz einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge des Zentrums der universellen einhüllenden Algebra einer komplexen oder reellen endlichdimensionalen halbeinfachen Lie-Algebra	8
§ 2 Über das Zentrum der universellen einhüllenden Algebra einer reellen Form und der Reellifizierung einer endlichdimensionalen komplexen halbeinfachen Lie-Algebra	23
§ 3 Eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine Untermenge des Zentrums der universellen einhüllenden Algebra einer endlichdimensionalen komplexen halbeinfachen Lie-Algebra algebraisch unabhängig ist und dieses Zentrum erzeugt	36
§ 4 Algebraisch unabhängige Erzeugendenmengen der Zentren der universellen einhüllenden Algebren komplexer bzw. reeller einfacher Lie-Algebren aus den Isomorphieklassen A_1 , B_1 , C_1 , D_1 und G_2 bzw. aus den Isomorphieklassen der dazugehörigen reellen Formen..	39
4.1. Die Casimir-Elemente der Isomorphieklasse A_1 und der Isomorphieklassen der reellen Formen von A_1	41
4.2. Die Casimir-Elemente der Isomorphieklasse B_1 und der Isomorphieklassen der reellen Formen von B_1	48
4.3. Die Casimir-Elemente der Isomorphieklasse C_1 und der Isomorphieklassen der reellen Formen von C_1	53
4.4. Die Casimir-Elemente der Isomorphieklasse D_1 und der Isomorphieklassen der reellen Formen von D_1	59
4.5. Die Casimir-Elemente der Isomorphieklasse G_2 und der Isomorphieklassen der reellen Formen von G_2	67
Anhänge	75
Anhang A: Einige Begriffe und Sätze aus der Theorie von Lie-Algebren	75
Anhang B: Einige Begriffe und Sätze aus der Algebra	80
Anhang C: Invarianten einer Gruppe von Automorphismen eines Vektorraumes	86
Schlußbemerkung	90

Liste der verwendeten Symbole	93
Literaturverzeichnis	96

Einleitung

Unter einem Casimir-Operator versteht man in der Physik ein Polynom in den infinitesimalen Erzeugenden einer Darstellung einer Lie-Gruppe, das mit dieser Darstellung vertauscht. Diese Operatoren haben ein weites Anwendungsgebiet in Atom-, Kern- und Elementarteilchenphysik. Aus der Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten der Casimir-Operatoren bringen wir im folgenden einige Beispiele. Das bekannteste Beispiel in der Atomphysik ist das Quadrat des Vektoroperators für den Gesamtdrehimpuls als ein Casimir-Operator der Drehgruppe. Weitere Beispiele sind die zwei unabhängigen Casimir-Operatoren von $SO(4)$, mit deren Hilfe man leicht die Energieniveaus des Wasserstoffatoms berechnen kann (vgl. [1; pp 222 - 224]). Den quadratischen Casimir-Operator von $SO(2l+1)$ benutzt RACAHA in [2] zur Berechnung der Energieniveaus der Schalen des Atomkernes. Zur vollständigen Beschreibung der Wechselwirkungsenergie im Atomkern nach der Slater-Methode werden Casimir-Operatoren von $SU(2)$ und $SU(3)$ benutzt (vgl. [3; pp 408 - 411]). In [4] werden die Eigenwerte des quadratischen Casimir-Operators von $SU(n)$ als die Quantenzahl Pseudospin eingeführt. Im Elliot-Modell des Atomkerns wird ein Casimir-Operator von $SU(3)$ zur Berechnung der Rotationsenergiebänder verwendet (vgl. [5; p.6] , [6; pp 72 - 73]). In der $SU(4)$ -Theorie des Kerns wird die Energie des Grundzustandes leicht durch einen Casimir-Operator von $SU(4)$ angegeben (vgl. [5; p.12], [7; p.322]). Für weitere Beispiele für die Anwendung von Casimir-Operatoren in der Kernphysik verweisen wir noch auf [8; pp 408 - 409] und [9]; dort werden Casimir-Operatoren zur Charakterisierung von Spin-Isospin-Zuständen und zur Behandlung von Mehr-Körper-Kräften benutzt. Wichtige Beispiele für Casimir-Operatoren in der Elementarteilchenphysik sind die Quadrate des vierdimensionalen Impulses und des Pauli-Lubanski-Vektors, die Casimir-Operatoren der Poincaré-Gruppe sind (vgl. [10; p.56]). Sie werden in den physikalisch interpretierten Darstellungen der Poincaré-Gruppe zur Charakterisierung der Masse und des Spins von Elementarteilchen benutzt. Ferner kann man mit ihren Eigenwerten die irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe kennzeichnen (vgl. [11]). In den Arbeiten [12], [13; p.137], [14], [15; pp 555, 560 - 561] und [16] werden Casimir-Operatoren von $SU(n)$ verschiedentlich in der Theorie der starken Wechselwirkung von Elementarteilchen benutzt (z.B. zur Berechnung der Streumatrix und des Massenspektrums; Hamilton-Operatoren werden mit Casimir-Operatoren identifiziert; $SU(6)$ -Symmetrie).

Viele Differentialgleichungen der theoretischen Physik sind Eigenwertgleichungen von Casimir-Operatoren. So ist z.B. der Hamilton-Operator des freien Geldeisels ein Casimir-Operator der Drehgruppe. Dieser Operator war der Anlaß

für CASIMIR in [17] die in der Literatur als *Casimir-Operator* schlechthin bezeichnete quadratische Invariante für halbeinfache Lie-Algebren einzuführen. Der d'Alembert-Operator in der Klein-Gordon-Gleichung bzw. das Quadrat des Differentialoperators erster Ordnung der Dirac-Gleichung ist eine Darstellung des Massenoperators und damit ein Casimir-Operator der Poincaré-Gruppe. Damit und mit dem Schurschen Lemma, das besagt, daß ein Operator, der mit der Darstellung einer Gruppe vertauscht, in jeder irreduziblen Darstellung dieser Gruppe ein Vielfaches der identischen Abbildung ist, wird eine Bedeutung der Casimir-Operatoren und der Matrixelemente einer irreduziblen Darstellung einer Gruppe ersichtlich. Die Casimir-Operatoren sind das wichtigste Instrument zur Lösung der zwei sogenannten Racah-Probleme (vgl. [18; p. 56 ff], [19; p.28]). Das erste Problem besteht darin, die irreduziblen Darstellungen einer Lie-Gruppe zu charakterisieren. Das zweite Problem ist die Kennzeichnung einer Basis einer irreduziblen Darstellung einer Lie-Gruppe, d.h. die Aufhebung der Entartung der Zustände. Wegen des Schurschen Lemmas können die simultanen Eigenwerte der Casimir-Operatoren der Lie-Gruppe, deren irreduzible Darstellungen betrachtet werden, immer zur Lösung des ersten Racah-Problems herangezogen werden. Zur Lösung des zweiten Racah-Problems genügen oft die Casimir-Operatoren von Lie-Untergruppen der zu betrachtenden Lie-Gruppe (vgl. z.B. für Darstellungen von $U(n)$ [3; pp 333 ff, 353 ff]). Eine weitere Anwendung von Casimir-Operatoren findet man bei Expansionen einer Lie-Algebra (vgl. [20; p.483 ff]). Zusammenfassend stellen wir über die wichtigsten Anwendungsmöglichkeiten von Casimir-Operatoren fest, daß man mit ihnen

- a) Darstellungen von Gruppen ausreduzieren und somit sie als Observable interpretieren kann, die inneren Eigenschaften eines physikalischen Systems zugeordnet sind;
- b) neue Quantenzahlen bekommen kann, indem man sie einer beliebigen Menge von untereinander vertauschbaren Observablen hinzufügt;
- c) irreduzible Darstellungen (unter Umständen vollständig) kennzeichnen kann;
- d) ein vollständiges Observablensystem definieren und somit die Entartung aufheben kann.

Im Jahre 1931 gab CASIMIR in [17], wie oben erwähnt, einen Differentialoperator für jede halbeinfache Lie-Gruppe an, dessen Eigenfunktionen die Matrixelemente der irreduziblen Darstellungen sind. Dieser Operator ist die Darstellung des quadratischen Casimir-Operators als Differentialoperator, den man für jede halbeinfache Lie-Gruppe erklären kann. Mit Hilfe dieses Operators erbrachte CASIMIR 1932 den ersten rein algebraischen Beweis dafür, daß jede endlichdimensionale Darstellung der Lie-Algebra der Drehgruppe vollständig reduzibel ist.

VAN DER WAERDEN dehnte den Beweis dieser Aussage 1935 unter Benutzung des quadratischen Casimir-Operators auf den allgemeinen Fall einer beliebigen endlich-dimensionalen reellen oder komplexen halbeinfachen Lie-Algebra aus (vgl. [21]). Durch die Arbeiten von RACAHA (vgl. [2], [18]) wurde die Aufmerksamkeit auf die Nützlichkeit der Casimir-Operatoren in physikalischer Anwendung gelenkt. Zahlreiche Arbeiten befassen sich mit der Konstruktion von Casimir-Operatoren. Von diesen erwähnen wir im folgenden eine minimale Auswahl, welche die Ergebnisse der anderen umfaßt. In den Arbeiten [16], [19], [22] - [25] werden nach ad-hoc-Methoden für gewisse halbeinfache Lie-Gruppen Casimir-Operatoren bestimmt. Dabei zeigt sich, wie mühsam es ist, Casimir-Operatoren zu konstruieren. Für die klassischen Reihen der komplexen einfachen Lie-Algebren haben PERELOMOV und POPOV in den Arbeiten [26] auf einfache Weise Casimir-Operatoren angegeben. Die Beweise für ihre Behauptung, die angegebenen Casimir-Operatoren seien vollständig, d.h. ihre simultanen Eigenwerte würden eindeutig die irreduziblen Darstellungen charakterisieren, sind mangelhaft und mathematisch ungenau. In [27] werden für die reellen kompakten Lie-Algebren zu den Klassen A_1 , B_1 , C_1 , D_1 und G_2 jeweils 1 Casimir-Operatoren angegeben, wobei 1 der Rang der zu betrachtenden Lie-Algebra ist. Darin ist der Beweis für die Vollständigkeit der 1 konstruierten Casimir-Operatoren jeder der betrachteten Lie-Algebren fehlerhaft, ungenau und unvollständig.

Bei einer systematischen Untersuchung der Casimir-Operatoren sind die Fragen wichtig, ob es eine Konstruktionsmethode für sie gibt, ob sie eine endliche Erzeugendenmenge besitzen und ob es möglich ist bei Vorgabe einer Menge von Casimir-Operatoren festzustellen, daß diese Menge eine Erzeugendenmenge ist. In der Sprache der Mathematik ist ein Casimir-Operator ein Darstellungsoperator eines Elementes vom Zentrum der universellen einhüllenden Algebra einer Lie-Algebra, dessen Elemente wir im folgenden auch *Casimir-Elemente* der Lie-Algebra nennen werden. Dieses Zentrum ist von Mathematikern vielfach untersucht worden (vgl. z.B. HARISH-CHANDRA [28], [29]). Es ist bekannt, daß es einen Vektorraum-Isomorphismus λ (die sogenannte *Symmetrisierung*) von der symmetrischen Algebra $S(L)$ auf die universelle einhüllende Algebra $U(L)$ einer endlichdimensionalen reellen bzw. komplexen Lie-Algebra L gibt derart, daß λ die Invariantenalgebra $S_{Int}(L)$ der zu L adjungierten Gruppe auf die Menge $Z(L)$ der Casimir-Elemente von L abbildet. Die Elemente von $S_{Int}(L)$ sind die Polynome s , die dem Differentialgleichungssystem

$$(1) \quad \sum_{j,k=1}^n c_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_j} s = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

genügen; dabei ist $\{c_{ij}^k \mid 1 \leq i, j, k \leq n\}$ die Menge der Strukturkonstanten von L bezüglich einer Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ und n die Dimension von L (vgl. [30; p.192]). Nun wurde in [31] die Behauptung aufgestellt, aus dem oben Dargelegten würde folgen, daß die maximale Zahl von unabhängigen Casimir-Elementen einer beliebigen endlichdimensionalen Lie-Algebra gleich $n-r$ sei; dabei heißen eine Anzahl von Casimir-Elementen unabhängig, wenn ihre Eigenwertspektren unabhängig sind, und r bedeutet den maximalen Rang der Matrixfunktion $\left(\sum_{k=1}^n c_{ij}^k x_k \right)_{1 \leq i, j \leq n}$. Diese Aussage, die in der Literatur benutzt worden ist, ist mathematisch ungenau. Ein Gegenbeispiel für diese Aussage ist die Lie-Algebra der Lie-Gruppe der Translationen und Dilatationen der Ebene. Hier ist $n-r = 1$, das System (1) hat aber außer den Konstanten keine Polynomlösungen (vgl. [32]). Nach [33; p.331] besitzt (1) $n-r$ unabhängige Lösungen (in der Bedeutung der Unabhängigkeit von Funktionen) die eine Erzeugendenmenge der Lösungsmannigfaltigkeit von (1) bilden. Da nach [34; pp 321 - 322] für komplexe Lie-Algebren L die Algebra $Z(L)$ algebraisomorph zu der Algebra $S_{\text{Int}}(L)$ ist, folgt daraus zunächst nur für komplexe Lie-Algebren, daß es höchstens $n-r$ unabhängige Casimir-Elemente von L gibt. Dabei muß man die mathematischen Voraussetzungen genau diskutieren, um den Begriff unabhängig auf $Z(L)$ anwenden zu können. In [35] wird gezeigt, daß es höchstens $n-r$ algebraisch unabhängige Polynomlösungen von (1) gibt. Daraus folgt für komplexe Lie-Algebren L wegen der Isomorphie von $Z(L)$ zu $S_{\text{Int}}(L)$, daß es höchstens $n-r$ algebraisch unabhängige Casimir-Elemente von L gibt. DIXMIER hat in [36] gezeigt, daß für nilpotente komplexe oder reelle Lie-Algebren L die Algebren $S_{\text{Int}}(L)$ und $Z(L)$ zueinander isomorph sind. Damit folgt die vorherige Aussage auch für reelle nilpotente Lie-Algebren. Mit der Bemerkung (2.3) ff dieser Arbeit folgt dieselbe Aussage für beliebige reelle endlichdimensionale Lie-Algebren. Aus allen diesen Untersuchungen kann man keine im obigen Sinn nützliche Aussage über eine Erzeugendenmenge von Casimir-Elementen gewinnen. Wir nannten weiter oben ein Beispiel für Lie-Algebren, deren Casimir-Elemente trivial sind und für die die obere Grenze $n-r$ nicht angenommen wird. Deshalb war es sinnvoll, den Rahmen unserer Arbeit auf solche Lie-Algebren einzuschränken, die klare Aussagen über Erzeugendenmengen ihrer Casimir-Elemente erwarten lassen. Ferner sollten ihre für die Physik wichtigen Darstellungen durch Casimir-Elemente charakterisiert werden können.

In der Physikliteratur findet man die Aussage, daß eine endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebra eine Erzeugendenmenge von Casimir-Elementen besitzt, deren Mächtigkeit gleich dem Rang der Lie-Algebra ist, und daß die simultanen Eigenwerte einer solchen Menge von Casimir-Elementen in einer endlichdimensionalen irreduziblen Darstellung diese Darstellung eindeutig bestimmen. Dabei wird,

wenn überhaupt, auf zwei Arbeiten von RACAH [18] und [37] oder eine Arbeit von GELFAND [38] verwiesen. In [18; pp 54 - 55] wird zum Beweis der erwähnten Aussage gezeigt, daß die Eigenwerte der Casimir-Operatoren, als Funktionen von bestimmten Variablen aufgefaßt, invariant sind unter der Weyl-Gruppe. Für den Rest des Beweises der vollen Aussage verweist RACAH auf seine Arbeit [37], die einerseits von einem mathematischen Standpunkt aus weder klar noch streng in der Formulierung und Beweisführung ist und andererseits unbewiesen benutzt, daß die Algebra der Invarianten der zu einer halbeinfachen Lie-Algebra adjungierten Gruppe von einer Menge von Elementen erzeugt wird, deren Anzahl gleich dem Rang der Lie-Algebra ist. In [38] werden einige Aussagen über die Beziehung zwischen dem Zentrum der universellen einhüllenden Algebra einer Lie-Algebra und der Invariantenalgebra der zu dieser Lie-Algebra adjungierten Gruppe gemacht. Die Beweise dieser Aussagen sind nur skizziert. Da viele Lie-Gruppen, die in der Physik eine Rolle spielen, halbeinfach sind, ergab sich die Notwendigkeit, die oben erwähnte Aussage über die Casimir-Elemente der halbeinfachen Lie-Algebren kritisch zu prüfen. Mit mathematischer Strenge beweisen wir in dieser Arbeit, daß das Zentrum $Z(L)$ der universellen einhüllenden Algebra $U(L)$ einer endlichdimensionalen komplexen oder reellen halbeinfachen Lie-Algebra L von dem Einselement von $U(L)$ und einer l -elementigen und algebraisch unabhängigen Menge erzeugt wird, wobei l der Rang von L ist. Dies folgern wir für komplexe Lie-Algebren L mit Hilfe des oben erwähnten Vektorraum-Isomorphismus von $S_{\text{Int}}(L)$ auf $Z(L)$ aus der Isomorphie zwischen $S_{\text{Int}}(L)$ und der Invariantenalgebra der Weyl-Gruppe von L und einem Satz von CHEVALLEY [39] über die Existenz einer minimalen Erzeugendenmenge der Invariantenalgebra einer endlichen Spiegelungsgruppe. Für reelle Lie-Algebren L beweisen wir die obige Aussage über die Komplexifizierung von L . Mit dieser Aussage über sowohl komplexe als auch reelle Lie-Algebren L beweisen wir die Isomorphie von $Z(L)$ und $S_{\text{Int}}(L)$ zu der Polynomalgebra in l Unbestimmten und machen wesentliche Aussagen über die Erzeugendenmengen von $Z(L)$ und $S_{\text{Int}}(L)$. Danach führen wir das Problem des Auffindens von Casimir-Elementen einer halbeinfachen Lie-Algebra auf dasselbe Problem für einfache Lie-Algebren zurück, indem wir zeigen, wie man aus $Z(L_1)$ und $Z(L_2)$ von Lie-Algebren L_1 und L_2 die Casimir-Elemente der direkten Lie-Algebra-Summe $L_1 \ltimes L_2$ gewinnen kann. Damit ist auch das Problem des Aufsuchens der Casimir-Elemente der reduktiven Lie-Algebren auf das der einfachen Lie-Algebren zurückgeführt, denn die ersteren sind die direkte Summe des Zentrums mit einem halbeinfachen Ideal der Lie-Algebra. Wir geben auch eine Methode an, mit der man einige Casimir-Elemente einer halbeinfachen Lie-Algebra berechnen kann.

In der Physikliteratur wird meistens zwischen einer reellen und einer komplexen Lie-Algebra nicht unterschieden. Bei der Untersuchung einer reellen Form einer komplexen Lie-Algebra wird sie stillschweigend mit einer anderen zu ihr nicht isomorphen reellen Form identifiziert (vgl. z.B. die erste Arbeit in [26], in der die Lie-Algebra von $SU(n)$ mit der von $SL(n, \mathbb{R})$ identifiziert wird). Deshalb sind die angegebenen Casimir-Elemente die der komplexifizierten Lie-Algebra und nicht die der zu untersuchenden reellen Lie-Algebra. Daher haben wir auch die Beziehung zwischen den Casimir-Elementen einer komplexen Lie-Algebra und jenen ihrer reellen Formen untersucht. Wir geben Methoden an, mit denen man aus einer Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente einer beliebigen komplexen Lie-Algebra eine entsprechende Menge für irgendeine ihrer reellen Formen bzw. ihre Reellifizierung berechnen kann und umgekehrt. Damit kann man bei Kenntnis der Casimir-Elemente der komplexen Lie-Algebren die Casimir-Elemente der reellen Lie-Algebren gewinnen und umgekehrt. Insbesondere haben wir gezeigt, wie man bei Kenntnis einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente von komplexen halbeinfachen Lie-Algebren eine entsprechende Menge für alle reellen halbeinfachen Lie-Algebren berechnen kann und umgekehrt. In § 3 der Arbeit ist es uns gelungen, ein Kriterium anzugeben, mit dessen Hilfe man nachprüfen kann, ob eine vorgegebene Menge von Casimir-Elementen einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge ist. Dabei ist wesentlich, daß dieses Kriterium und unsere Beweismethode in der Praxis unmittelbar angewandt werden können. Es gibt in der Literatur zwar Untersuchungen zur Feststellung der Zahl der maximal algebraisch unabhängigen Casimir-Elemente einer komplexen Lie-Algebra (vgl. [18], [31], [35], [37], [38], [40]), aber entweder ist die Frage nach der Existenz einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge von Casimir-Elementen überhaupt nicht diskutiert worden oder ist der Existenzbeweis für eine solche Menge mathematisch ungenau, unklar und unvollständig. Man hat auch bisher in der Literatur kein Kriterium angegeben, mit dessen Hilfe man feststellen könnte, ob eine vorgegebene Menge von Casimir-Elementen eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge ist. Dabei ist für die physikalische Anwendung die Existenz und die Kenntnis einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge von Casimir-Elementen einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra unter anderem deshalb von Bedeutung, weil man damit die endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen eindeutig charakterisieren kann (der exakte Beweis dieser Aussage ist in [41] zu finden). Ferner waren alle bisherigen Untersuchungen auf komplexe Lie-Algebren beschränkt. Wir bemerken auch, daß der erwähnte Isomorphismus von $S_{Int}(L)$ auf $Z(L)$ aus [34] keine praktische Anwendung hat, da dieser Isomorphismus die Kenntnis des Zentrums der universellen einhüllenden Algebra einer Lie-Algebra voraus-

setzt und deshalb, anders als in unserer Arbeit, es damit nicht möglich ist, aus einer Erzeugendenmenge der Invariantenalgebra der zu einer Lie-Algebra adjungierten Gruppe die Casimir-Elemente zu berechnen.

Im letzten Paragraphen dieser Arbeit haben wir für die Casimir-Elemente der reellen und der komplexen Lie-Algebren zu den Isomorphieklassen A_1 , B_1 , C_1 , D_1 und G_2 algebraisch unabhängige Erzeugendenmengen explizit konstruiert. Die Auswahl dieser Algebren war durch ihre Relevanz für die Physik bedingt. Zu den physikalischen Anwendungen von $\mathcal{A}(n)$ und $\mathcal{B}(n)$, die aus A_1 , B_1 und D_1 sind, haben wir anfangs der Einleitung mehrere Arbeiten angeführt. Die Casimir-Elemente der Lie-Algebra der symplektischen Gruppe, die aus C_1 ist, haben z.B. Anwendungen im Schalenmodell des Kernes (vgl. [3; p.411]) und dienen zur Lösung des zweiten Racah-Problems in den Darstellungen der orthogonalen Gruppen (vgl. [42]). Zusätzlich zu den Anwendungen von G_2 in der Kernphysik (vgl. z.B. [3; p.398]) sind die Casimir-Elemente von G_2 wichtig zur Lösung des zweiten Racah-Problems in den Darstellungen von $SU(7)$. Da Casimir-Operatoren der reellen Formen der klassischen Lie-Algebren z.B. bei der Untersuchung des relativistischen Zwei-Körper-Problems (vgl. [43; pp 269, 275]) und der de Sitter-Gruppe (vgl. [44; pp 641 - 643]) angewandt wurden, haben wir für alle reellen Formen der hier betrachteten komplexen einfachen Lie-Algebren algebraisch unabhängige Erzeugendenmengen ihrer Casimir-Elemente berechnet. Es sei auch bemerkt, daß wir als Repräsentanten aus den Isomorphieklassen der reellen Formen zu G_2 zwei Lie-Algebren angeben, die im Gegensatz zu den Konstruktionen in der mathematischen Literatur von sehr einfacher Gestalt sind. Ferner haben wir als ein notwendiges Hilfsmittel unserer Beweisführung bzw. als einfaches Nebenprodukt unserer Rechnungen algebraisch unabhängige Erzeugendenmengen der Invariantenalgebren der Weyl-Gruppen bzw. der adjungierten Gruppen der untersuchten Lie-Algebren explizit angegeben. In den Anhängen haben wir solche Begriffe erklärt oder Sätze bewiesen, die in den Behauptungen sowie in der Beweisführung des Hauptteiles unmittelbar benutzt werden.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H.J. Meister für die Anregung zu dieser Arbeit, zahlreiche gründliche Diskussionen und wertvolle Vorschläge danken. Mein Dank gilt auch Herrn Dr. U. Mutze für viele Diskussionen; er machte einen nützlichen Vorschlag zur basisfreien Beweisführung in (C.6). Diese Arbeit wurde mir ermöglicht durch finanzielle Unterstützung der Sektion Physik der Universität München und durch einen Arbeitsplatz sowie die Benutzung weiterer Einrichtungen des Lehrstuhls Professor Dr. F. Bopp. Mein besonderer herzlicher Dank gilt Frau Thea Hutzler, die das ganze Manuskript mit der Maschine geschrieben und die Formeln eingetragen hat.

§ 1 Die Existenz einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge des Zentrums der universellen einhüllenden Algebra einer komplexen oder reellen endlichdimensionalen halbeinfachen Lie-Algebra

Dieser Paragraph ist der theoretische Kern der ganzen Arbeit. Darin beweisen wir, daß das Zentrum $Z(L)$ der universellen einhüllenden Algebra $U(L)$ einer endlichdimensionalen komplexen oder reellen halbeinfachen Lie-Algebra L von $1_{U(L)}$ und einer 1-elementigen algebraisch unabhängigen Menge erzeugt wird, wobei 1 der Rang von L ist. Dies folgern wir für komplexe Lie-Algebren L aus einer Vektorraum-Isomorphie zwischen $Z(L)$ und der Invariantenalgebra $S_{\text{Int}}(L)$ der zu L adjungierten Gruppe, aus einer Algebra-Isomorphie zwischen $S_{\text{Int}}(L)$ und der Invariantenalgebra $S_{\text{Int}}(H^*)$ der Weyl-Gruppe von L und aus einer Aussage über die Existenz einer minimalen Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(H^*)$; für reelle Lie-Algebren L beweisen wir die obige Aussage über die Komplexifizierung von L . Daraus folgern wir, daß $Z(L)$ bzw. $S_{\text{Int}}(L)$ isomorph ist zu der Polynomialalgebra in 1 Unbestimmten, wobei L sowohl reell als auch komplex sein kann. Damit machen wir wesentliche Aussagen über die Erzeugendenmengen von $Z(L)$. Ferner zeigen wir, wie man bei Kenntnis von Erzeugendenmengen von $Z(L_1)$ und $Z(L_2)$ von beliebigen Lie-Algebren L_1 und L_2 das Zentrum $Z(L_1 \oplus L_2)$ der universellen einhüllenden Algebra $U(L_1 \oplus L_2)$ ihrer direkten Lie-Algebra-Summe berechnen kann. Damit ist die Gewinnung einer Erzeugendenmenge von $Z(L)$ einer halbeinfachen Lie-Algebra L auf das Aufsuchen von Erzeugendenmengen der Zentren der universellen einhüllenden Algebren derjenigen einfachen Lie-Algebren zurückgeführt, die in der direkten Lie-Algebra-Zerlegung von L nach einfachen Lie-Algebren vorkommen. Am Ende dieses Paragraphen geben wir noch für halbeinfache Lie-Algebren L eine Methode an, mit der man einige Elemente von $Z(L)$ und $S_{\text{Int}}(L)$ konstruieren kann.

Im folgenden ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und L , wenn nicht anders vermerkt, eine beliebige Lie-Algebra über $\mathbb{K}$.

(1.1) Satz: (vgl. [45; pp 344 - 346]). Seien $n := \dim(L)$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von L , $S(L)$ die symmetrische Algebra von L (vgl. (B.12)), τ die kanonische Einbettung von L in $S(L)$ (vgl. (B.13b)), $U(L)$ die universelle einhüllende Algebra von L (vgl. (A.5)), φ die kanonische Einbettung von L in $U(L)$ (vgl. (A.6a)) und $Z(L)$ das Zentrum von $U(L)$.

Dann ist die lineare Abbildung $\lambda: S(L) \rightarrow U(L)$, $\lambda(1_{S(L)}) := 1_{U(L)}$,

$$\lambda(\tau(y_1)\tau(y_2)\dots\tau(y_p)) := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varphi(y_{\sigma(1)}) \cdot \varphi(y_{\sigma(2)}) \cdot \dots \cdot \varphi(y_{\sigma(p)}),$$

wobei $p \in \mathbb{N}$, $y_j \in \{x_1, \dots, x_n\}$, $1 \leq j \leq p$ und S_p die symmetrische Gruppe ist, ein Vektorraum-Isomorphismus vom Grade Null (vgl. (B.16)); ist d_x , $x \in L$, die Derivation von $S(L)$ mit $d_x(\tau(y)) = \tau(\text{ad}(x)(y))$, $y \in L$ (vgl. (B.13e)), so gilt: $\lambda^{-1}(Z(L)) = \{s \in S(L) \mid d_x(s) = 0, x \in L\}$.

Die Abbildung λ wird manchmal als "Symmetrisierung" bezeichnet.

(1.2) Theorem: Seien $S(L)$, $Z(L)$ und λ wie in (1.1) und $S_{\text{Int}}(L)$ die Algebra der Invarianten von $\text{Int}(L)$ in $S(L)$ (vgl. (C.1), (C.4a)). Dann gilt: $\lambda^{-1}(Z(L)) = S_{\text{Int}}(L)$.

Bew.: Seien $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von L , $y_j \in \{x_1, \dots, x_n\}$, $1 \leq j \leq p$, $p \in \mathbb{N}$, und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $x \in L$ mit τ aus (1.1) wegen (B.13de):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\exp(t \text{ad}(x)) (\tau(y_1) \tau(y_2) \dots \tau(y_p))) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} (\tau(\exp(t \text{ad}(x))(y_1)) \dots \\ &\tau(\exp(t \text{ad}(x))(y_p))) \Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^p \tau(y_1) \dots \tau(y_{i-1}) \tau(\text{ad}(x)(y_i)) \tau(y_{i+1}) \dots \tau(y_p) = \\ &= d_x(\tau(y_1) \dots \tau(y_p)) \text{ mit } d_x \text{ wie in (1.1); für } 1_{S(L)} \text{ gilt: } \exp(t \text{ad}(x)) (1_{S(L)}) = 1_{S(L)} \end{aligned}$$

und offensichtl. $d_x(1_{S(L)}) = 0$. Damit folgt für $s \in S_{\text{Int}}(L)$ wegen $\exp(t \text{ad}(x))$

$(s) = s$ durch Differentiation nach t an der Stelle $t = 0$: $d_x(s) = 0$, d.h. nach (1.1): $S_{\text{Int}}(L) \subseteq \lambda^{-1}(Z(L))$. Sei nun S_i der Untervektorraum von $S(L)$ der homogenen Elemente vom Grade i , $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ (vgl. (B.15a)). Dann gilt nach (B.13de) für $x \in L$: $\exp(t \text{ad}(x)) (S_i) \subseteq S_i$ und $d_x(S_i) \subseteq S_i$, so daß $\exp(t \text{ad}(x))|_{S_i}$ und $d_x|_{S_i}$

Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraumes sind mit $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \exp(t \text{ad}(x))|_{S_i}$

$= d_x|_{S_i}$ (vgl. vorstehende Rechnung); daraus ergibt sich durch Integration, die für endlichdimensionale Räume trivial ist: $\exp(t \text{ad}(x))|_{S_i} = \exp(t d_x)|_{S_i}$.

Da für $s \in S(L)$ mit $d_x(s) = 0$ gilt, daß d_x auch die einzelnen homogenen Anteile $s_j \in S_i$ von s auf Null abbildet, d.h. $d_x(s_i) = 0$, folgt somit: $\exp(t \text{ad}(x))(s_i) = s_i$; damit ist: $\lambda^{-1}(Z(L)) \subseteq S_{\text{Int}}(L)$. ■

Somit und nach (1.1) ist $Z(L)$ vektorraumisomorph zu $S_{\text{Int}}(L)$. Nun folgt ein wichtiges Theorem, das für halbeinfaches L über $\mathbb{C}$ die Verbindung zwischen den Invarianten von $\text{Int}(L)$ und denen von der Weyl-Gruppe von L bezüglich einer Cartan-Unteralgebra von L (vgl. (A.13)) angibt.

(1.3) Theorem: (vgl. [47; pp 504, 521 - 523]). Seien L eine endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$, H eine Cartan-Unteralgebra von L (vgl. (A.1)), $P_{\text{Int}}(L)$ die Algebra der Invarianten von $\text{Int}(L)$ in der Algebra der

Polynomfunktionen $P(L)$ von L (vgl. (B.14), (C.4b)), $\hat{P}_{\text{Int}}(H)$ die Algebra der Invarianten von $\text{Int}(\mathcal{W}^*, H)$ (vgl. (A.15)) in der Algebra der Polynomfunktionen $P(H)$ von H und $R: P(L) \rightarrow P(H)$, $R(p) := p|_H$. Dann ist $R(\hat{P}_{\text{Int}}(L)) = \hat{P}_{\text{Int}}(H)$ und $\tilde{R}: \hat{P}_{\text{Int}}(L) \rightarrow \hat{P}_{\text{Int}}(H)$, $\tilde{R}(p) := R(p)$, ein Isomorphismus vom Grad 0.

Mit (1.3) ist $S_{\text{Int}}(L)$ nach (C.6) und (C.8) algebraisomorph zu $S_{\text{Int}}(H^*)$. Im folgenden wird eine Aussage über die Existenz einer minimalen Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(H^*)$ gemacht.

(1.4) Def.: Eine lineare Bijektion eines endlichdimensionalen Vektorraumes V über $\mathbb{C}$ auf V heißt eine Spiegelung von V , wenn sie involutorisch ist und eine Hyperebene von V punktweise invariant läßt. Eine Gruppe, die von Spiegelungen von V erzeugt wird, heißt eine Spiegelungsgruppe von V .

Die Weyl-Gruppe ist eine endliche Spiegelungsgruppe von H^* (vgl. (A.13) ff, (A.14)).

(1.5) Theorem: (vgl. [39]). Seien G eine endliche Spiegelungsgruppe von einem l -dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{C}$, $l \in \mathbb{N}$, und $S_G(V)$ die Algebra der Invarianten von G in der symmetrischen Algebra $S(V)$ von V . Dann ist $S_G(V)$ endlich erzeugt. Ist $\{1_{S(V)}, I_1, \dots, I_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, eine minimale Erzeugendenmenge von $S_G(V)$, die aus homogenen Elementen besteht, so ist $m = l$ und $\{I_1, \dots, I_l\}$ algebraisch unabhängig.

Man kann die Elemente einer Erzeugendenmenge von $S_G(V)$ stets als homogen annehmen, da jeder homogene Anteil einer Invariante wieder eine Invariante ist. Nach (1.5), (1.4) ff und (1.3) ff besitzt $S_{\text{Int}}(L)$, wobei L eine halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ ist, eine Erzeugendenmenge $\{1_{S(L)}, I_1, \dots, I_l\}$ derart, daß $\{I_1, \dots, I_l\}$ algebraisch unabhängig und I_i , $1 \leq i \leq l$, homogen ist. Dabei bezeichnet l den Rang von L (vgl. (A.3)). Mit der Zuordnung $1_{S(L)} \rightarrow 1_{\mathbb{C}[t_1, \dots, t_l]}$ und $I_i \rightarrow t_i$, $1 \leq i \leq l$, ist es wegen der algebraischen Unabhängigkeit von $\{I_1, \dots, I_l\}$ offensichtlich, daß $S_{\text{Int}}(L)$ algebraisomorph zu $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_l]$ ist. Damit ist eine Menge Σ mit $\text{card}(\Sigma) = l$, die mit $1_{S(L)}$ ganz $S_{\text{Int}}(L)$ erzeugt, wegen (B.6) algebraisch unabhängig.

(1.6) Def.: Seien L über $\mathbb{K}$, $U(L)$ die universelle einhüllende Algebra von L , $Z(L)$ das Zentrum von $U(L)$ und $\varphi: L \rightarrow U(L)$ die kanonische Einbettung von L in $U(L)$ (vgl. (A.6a)). Dann bezeichnen wir mit $U^+(L)$ den Durchschnitt aller Unteralgebren von $U(L)$, die $\varphi(L)$ als Untermenge enthalten, d.h. $\varphi(L)$ ist eine Erzeugendenmenge von $U^+(L)$ (vgl. (B.1)). Ferner setzen wir:
 $Z^+(L) := Z(L) \cap U^+(L)$.

Es ist $\text{Grad}(y) > 0$ für $y \in U^+(L)$ (vgl. B.15) ff). Entwickelt man ein Element von $U^+(L)$ nach einer Birkhoff-Witt-Basis von $U(L)$ (vgl. (A.6e)), so tritt in dieser

Entwicklung keine Konstante als Summand auf. $U^+(L)$ bzw. $Z^+(L)$ ist ein Ideal in $U(L)$ bzw. in $Z(L)$. Mit Hilfe von $U^+(L)$ und $Z^+(L)$ können wir die folgenden und in den nächsten Paragraphen gemachten Aussagen leicht formulieren.

(1.7) Theorem: Seien L eine endlichdimensionale Lie-Algebra über $\mathbb{K}$, λ der Vektorraum-Isomorphismus wie in (1.1) und $\{I_1, \dots, I_l\}$, $1 \leq l$, eine Untermenge von $S_{\text{Int}}(L)$. Dann gilt:

- $\{I_1, \dots, I_l\}$ ist genau dann eine Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(L)$, wenn $\{\lambda(I_1), \dots, \lambda(I_l)\}$ eine Erzeugendenmenge von $Z(L)$ ist.
- Ist $\{I_1, \dots, I_l\}$ eine algebraisch unabhängige Menge homogener Elemente, so ist $\{\lambda(I_1), \dots, \lambda(I_l)\}$ algebraisch unabhängig.

Bew.: Wegen (1.1) gilt: $\lambda(\tau(y_1)\tau(y_2)\dots\tau(y_p)) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varphi(y_{\sigma(1)}) \cdot \varphi(y_{\sigma(2)}) \cdot \dots \cdot \varphi(y_{\sigma(p)})$, $y_i \in L$, $1 \leq i \leq p$. Auf der rechten Seite dieser Gleichung kann man jeden Summanden durch Vertauschungen auf die Form $\varphi(y_1) \cdot \varphi(y_2) \cdot \dots \cdot \varphi(y_p)$ bringen, wobei ein Restglied verbleibt von einem Grad (vgl. (B.15b)) kleiner als p . Damit gilt für $s \in S(L)$ mit $s = \tau(y_1)^{\nu_1} \dots \tau(y_p)^{\nu_p}$, $\nu_i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\tau(y_i)^0 = 1_{S(L)}$, $1 \leq i \leq p$:

$$\lambda(s) = \varphi(y_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot \varphi(y_p)^{\nu_p} + \lambda(r) \text{ mit } r \in S(L), \varphi(y_i)^0 = 1_{U(L)},$$

(1)

$$1 \leq i \leq p, \text{ grad}(r) < \text{grad}(s).$$

Seien $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von L und g_i der Grad von I_i , $1 \leq i \leq l$. Dann hat I_i die Form: $I_i = \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_n \leq g_i} a_{\mu_1, \dots, \mu_n}^i \tau(x_1)^{\mu_1} \dots \tau(x_n)^{\mu_n}$, $a_{\mu_1, \dots, \mu_n}^i \in \mathbb{K}$, $\mu_k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$. Damit gilt nach (1) und (1.2) für $1 \leq i, j \leq l$:

$$\begin{aligned} \lambda(I_i I_j) &= \sum_{\substack{\mu_1 + \dots + \mu_n \leq g_i \\ \nu_1 + \dots + \nu_n \leq g_j}} a_{\mu_1, \dots, \mu_n}^i a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^j \lambda(\tau(x_1)^{\mu_1} \dots \tau(x_n)^{\mu_n} \tau(x_1)^{\nu_1} \dots \tau(x_n)^{\nu_n}) = \\ (2) \quad &= \lambda(I_i) \cdot \lambda(I_j) + \lambda(r) \text{ mit } r \in S_{\text{Int}}(L) \text{ und } \text{grad}(r) < g_i + g_j, \text{ wobei wir } r = 0 \\ &\text{für } \text{grad}(r) < 0 \text{ setzen.} \end{aligned}$$

Damit beweisen wir die Aussagen a) und b):

a) Seien $z \in Z(L)$ und $\{I_1, \dots, I_l\}$ eine Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(L)$. Dann gibt es nach (1.2) ein $s \in S_{\text{Int}}(L)$ mit $\lambda(s) = z$ und s hat die Gestalt:

$$s = \sum_{n_1, \dots, n_l \in \{0\} \cup \mathbb{N}} b_{n_1, \dots, n_l} I_1^{n_1} \dots I_l^{n_l}, \quad b_{n_1, \dots, n_l} \in \mathbb{K}. \text{ Daraus folgt nach (2):}$$

$$\lambda(s) = \sum_{n_1, \dots, n_l \in \{0\} \cup \mathbb{N}} b_{n_1, \dots, n_l} \lambda(I_1)^{n_1} \dots \lambda(I_l)^{n_l} = \lambda(r) \text{ mit } \text{grad}(r) < \text{grad}(s) \text{ und}$$

$\lambda(r) \in Z(L)$. Damit folgt durch Induktion nach $\text{grad}(z)$, $z \in Z(L)$, daß $\{\lambda(I_1), \dots, \lambda(I_l)\}$ eine Erzeugendenmenge von $Z(L)$ ist, da für $\text{grad}(z) = 0$ offensichtlich z

von $\lambda(1_{S(L)}) = 1_{U(L)}$ erzeugt wird und $\{I_1, \dots, I_l\}$ mindestens eine Konstante als Element besitzt. Die umgekehrte Richtung der Aussage in a) beweist man analog wie oben, indem man von der folgenden Form der Gleichung (2) ausgeht: $I_i I_j \cdot r = \lambda^{-1}(\lambda(I_i) \cdot \lambda(I_j))$, $\text{grad}(r) < g_i + g_j$.

b) Wir nehmen an, daß es ein Polynom $p \in \mathbb{K}[t_1, \dots, t_l]$ gibt mit $p \neq 0$ und $p(\lambda(I_1), \dots, \lambda(I_l)) = 0$. p habe die Darstellung: $p = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l \in \{0\} \cup \mathbb{N}} a_{\nu_1, \dots, \nu_l}$

$t_1^{\nu_1} \dots t_l^{\nu_l}$, $a_{\nu_1, \dots, \nu_l} \in \mathbb{K}$. Dann gilt:

$$(3) \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l} a_{\nu_1, \dots, \nu_l} \lambda^{-1}(\lambda(I_1)^{\nu_1} \dots \lambda(I_l)^{\nu_l}) = 0.$$

Nun ergibt sich aus (2) durch vollständige Induktion: $\lambda(I_1^{\nu_1} \dots I_l^{\nu_l}) = \lambda(I_1)^{\nu_1} \dots \lambda(I_l)^{\nu_l} + \lambda(r_{\nu_1, \dots, \nu_l})$ mit $\text{grad}(r_{\nu_1, \dots, \nu_l}) < \text{grad}(I_1^{\nu_1} \dots I_l^{\nu_l})$; daraus folgt: $I_1^{\nu_1} \dots I_l^{\nu_l} - r_{\nu_1, \dots, \nu_l} = \lambda^{-1}(\lambda(I_1)^{\nu_1} \dots \lambda(I_l)^{\nu_l})$, womit (3) übergeht in

$$(4) \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l} a_{\nu_1, \dots, \nu_l} (I_1^{\nu_1} \dots I_l^{\nu_l} - r_{\nu_1, \dots, \nu_l}) = 0 \text{ mit } \text{grad}(r_{\nu_1, \dots, \nu_l}) < \text{grad}(I_1^{\nu_1} \dots I_l^{\nu_l}).$$

Daraus folgern wir, daß alle $a_{\nu_1, \dots, \nu_l}$ verschwinden und somit $p = 0$ ist, indem wir die gegenteilige Annahme zum Widerspruch führen. Sei $M_k := \{(\nu_1, \dots, \nu_l) \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^l \mid a_{\nu_1, \dots, \nu_l} \neq 0, \text{grad}(I_1^{\nu_1} \dots I_l^{\nu_l}) = k\}$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, und $\bar{k} := \max\{k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \mid M_k \neq \emptyset\}$. Dann gilt: $\text{grad}(r_{\nu_1, \dots, \nu_l}) < \bar{k}$ für alle $(\nu_1, \dots, \nu_l) \in M_{\bar{k}} \cup M_k$, so daß der homogene Anteil vom Grade $\bar{k}$ der linken Seite von (4), d.h. der Ausdruck $\sum_{(\nu_1, \dots, \nu_l) \in M_{\bar{k}}} a_{\nu_1, \dots, \nu_l} I_1^{\nu_1} \dots I_l^{\nu_l}$ für sich verschwinden muß; daraus

folgt wegen der algebraischen Unabhängigkeit von $\{I_1, \dots, I_l\}$: $a_{\nu_1, \dots, \nu_l} = 0$ für $(\nu_1, \dots, \nu_l) \in M_{\bar{k}}$ im Widerspruch zu $M_{\bar{k}} \neq \emptyset$. Somit ist $p = 0$ und $\{\lambda(I_1), \dots, \lambda(I_l)\}$ algebraisch unabhängig.

Es ist zu bemerken, daß (1.7) bewiesen wurde aufgrund der Eigenschaften des Vektorraum-Isomorphismus λ ; ferner haben wir nicht vorausgesetzt, daß L halbeinfach ist oder daß l eine sonstige außer der angegebenen Bedeutung hat.

Nach (1.7) und nach (1.5)ff besitzt $Z(L)$, wobei L eine halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ ist, eine minimale Erzeugendenmenge $\{1_{U(L)}, z_1, \dots, z_m\}$ derart, daß $\{z_1, \dots, z_m\}$ algebraisch unabhängig ist. Dabei ist l der Rang von L .

(1.8) Korollar: Seien L eine endlichdimensionale komplexe halbeinfache Lie-Algebra l der Rang von L , $z_i \in Z^+(L)$, $1 \leq i \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda^{-1}(z_i)$ ein homogenes Element und $\{z_1, \dots, z_m\}$ eine minimale Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$. Dann ist

$m = 1$ und $\{z_1, \dots, z_1\}$ algebraisch unabhängig.

Bew.: Wegen (1.3) ff, (1.5) und (1.7) genügt es zu zeigen, daß $\{1_{S(L)},$

$\lambda^{-1}(z_1), \dots, \lambda^{-1}(z_m)\}$ eine minimale Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(L)$ ist.

Wegen (1.7a) ist $\{1_{S(L)}, \lambda^{-1}(z_1), \dots, \lambda^{-1}(z_m)\}$ eine Erzeugendenmenge von

$S_{\text{Int}}(L)$. Ihre Minimalität folgt durch einen Widerspruchsbeweis: O.E.d.A. werde

$\lambda^{-1}(z_1)$ von $\{1_{S(L)}, \lambda^{-1}(z_2), \dots, \lambda^{-1}(z_m)\}$ erzeugt. Dann folgt analog zu dem ersten Teil des Beweises von (1.7a), daß $\{z_2, \dots, z_m\}$ eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ ist, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. ■

Wir werden nun im folgenden die Aussage (1.7) ff für reelle endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebren beweisen.

(1.9) Def.: Sei U eine reelle Algebra. Dann nennen wir das mengentheoretische Produkt $U \times U$ zusammen mit den folgenden Verknüpfungen:

$$(x, y) + (\hat{x}, \hat{y}) := (x + \hat{x}, y + \hat{y}), \quad (x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in U \times U,$$

$$\alpha(x, y) := (\operatorname{Re}(\alpha)x - \operatorname{Im}(\alpha)y, \operatorname{Re}(\alpha)y + \operatorname{Im}(\alpha)x), \quad \alpha \in \mathbb{C}, (x, y) \in U \times U,$$

$$(x, y) \cdot (\hat{x}, \hat{y}) := (x \cdot \hat{x} - y \cdot \hat{y}, x \cdot \hat{y} + y \cdot \hat{x}), \quad (x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in U \times U$$

die Komplexifizierung von U und bezeichnen es mit $U^{\mathbb{C}}$.

Ist $\{x_i | i \in I\}$, wobei I eine Menge ist, eine Basis von U , so ist $\{(x_i, 0) | i \in I\}$ eine Basis von $U^{\mathbb{C}}$. Besitzt U ein Einselement 1_U , so ist $(1_U, 0)$ das Einselement von $U^{\mathbb{C}}$. Mit U ist auch $U^{\mathbb{C}}$ assoziativ oder kommutativ.

(1.10) Lemma: Seien L eine reelle Lie-Algebra, $U(L)$ bzw. $U(L)^{\mathbb{C}}$ die universelle einhüllende Algebra von L bzw. $L^{\mathbb{C}}$ und $\varphi: L \rightarrow U(L)$ bzw. $\varphi_{\mathbb{C}}: L^{\mathbb{C}} \rightarrow U(L)^{\mathbb{C}}$ die kanonische Einbettung von L in $U(L)$ bzw. von $L^{\mathbb{C}}$ in $U(L)^{\mathbb{C}}$ (vgl. (A.6a)). Dann ist die Abbildung $L^{\mathbb{C}} \rightarrow U(L)^{\mathbb{C}}, (x, y) \mapsto (\varphi(x), \varphi(y))$ ein injektiver Homomorphismus und die dadurch nach (A.6b) eindeutig bestimmte Abbildung $\phi: U(L)^{\mathbb{C}} \rightarrow U(L)^{\mathbb{C}}$ ein Isomorphismus.

Bew.: Wegen (A.6a) folgt, daß $f: L^{\mathbb{C}} \rightarrow U(L)^{\mathbb{C}}, f(x, y) := (\varphi(x), \varphi(y))$ linear und injektiv ist. Ferner gilt mit (1.9) für $(x, y), (\hat{x}, \hat{y}) \in L \times L$:

$f([x, y], (\hat{x}, \hat{y})) = f([x, \hat{x}] - [y, \hat{y}], [x, \hat{y}] + [y, \hat{x}]) = (\varphi([x, \hat{x}]) - \varphi([y, \hat{y}]), \varphi([x, \hat{y}]) + \varphi([y, \hat{x}])) = (\varphi(x) \cdot \varphi(\hat{x}) - \varphi(\hat{x}) \cdot \varphi(x) - \varphi(y) \cdot \varphi(\hat{y}) + \varphi(\hat{y}) \cdot \varphi(y), \varphi(x) \cdot \varphi(\hat{y}) - \varphi(\hat{y}) \cdot \varphi(x) + \varphi(y) \cdot \varphi(\hat{x}) - \varphi(\hat{x}) \cdot \varphi(y)) = (\varphi(x), \varphi(y)) \cdot (\varphi(\hat{x}), \varphi(\hat{y})) - (\varphi(\hat{x}), \varphi(\hat{y})) \cdot (\varphi(x), \varphi(y)) = [f(x, y), f(\hat{x}, \hat{y})]$. Damit ist f ein injektiver Homomorphismus. Daraus folgt mit (A.6b), daß ϕ ein Homomorphismus ist. Es genügt noch zu zeigen, daß ϕ bijektiv ist. Sei $\{x_i | i \in I\}$ eine Basis von L , wobei I eine geordnete Menge ist. Dann ist nach (1.9) ff $\{(x_i, 0) | i \in I\}$ eine Basis von

$L^{\mathcal{C}}$ und wegen (A.6e) $\{1_{U(L^{\mathcal{C}})}\} \cup \{\varphi_C((x_{i_1}, 0)) \cdot \varphi_C((x_{i_2}, 0)) \cdot \dots \cdot \varphi_C((x_{i_n}, 0)) \mid$
 $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n, i_j \in I, 1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Birkhoff-Witt-Basis von $U(L^{\mathcal{C}})$.
 Ferner ist $\{1_{U(L)}\} \cup \{\varphi(x_{i_1}) \cdot \varphi(x_{i_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(x_{i_n}) \mid i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n, i_j \in I,$
 $1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Birkhoff-Witt-Basis von $U(L)$, so daß $\{(1_{U(L)}, 0)\} \cup$
 $\{(\varphi(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot \varphi(x_{i_n}), 0) \mid i_1 \leq \dots \leq i_n, i_j \in I, 1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von
 $U(L)^{\mathcal{C}}$ ist. Wegen der Homomorphieeigenschaft von ϕ , wegen $f = \phi \circ \varphi_C$ (vgl. (A.6b))
 und mit (1.9) gilt: $\phi(1_{U(L^{\mathcal{C}})}) = (1_{U(L)}, 0)$, $\phi(\varphi_C((x_{i_1}, 0)) \cdot \varphi_C((x_{i_2}, 0)) \cdot \dots \cdot$
 $\varphi_C((x_{i_n}, 0))) = (\varphi(x_{i_1}) \cdot \varphi(x_{i_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(x_{i_n}), 0), i_1, \dots, i_n \in I, n \in \mathbb{N}$.
 Daraus folgt, daß ϕ bijektiv ist. Somit ist der Rest der Behauptung bewiesen. ■

(1.11) Theorem: Seien L eine endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebra
 über $\mathbb{K}$ und l ihr Rang. Dann gibt es eine l -elementige, algebraisch unab-
 hängige Untermenge von $Z(L)$, die mit $1_{U(L)}$ ganz $Z(L)$ erzeugt.

Bew.: Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt die Behauptung aus (1.7)ff. Wir beweisen nun (1.11) für
 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Da mit L auch $L^{\mathcal{C}}$ halbeinfach ist (vgl. [48; p.146]), besitzt $Z(L^{\mathcal{C}})$ eine
 minimale Erzeugendenmenge $\{1_{U(L^{\mathcal{C}})}, \hat{z}_1, \dots, \hat{z}_l\}$ derart, daß $\lambda^{-1}(\hat{z}_i), 1 \leq i \leq l$,
 homogene Elemente von $S_{\text{Int}}(L^{\mathcal{C}})$ sind. Dabei haben wir benutzt, daß der Rang von
 $L^{\mathcal{C}}$ gleich dem Rang von L ist (vgl. (A.4a)). Nach (1.10) gilt: $\phi(Z(L^{\mathcal{C}})) = Z(L)^{\mathcal{C}} =$
 $(Z(L), Z(L))$. Sei $(z_{i,1}, z_{i,2}) := \phi(\hat{z}_i), 1 \leq i \leq l$. Dann ist $\tilde{\Sigma} := \{(1_{U(L)}, 0),$
 $(z_{i,1}, 0), (z_{i,2}, 0) \mid 1 \leq i \leq l\}$ eine Erzeugendenmenge von $Z(L)^{\mathcal{C}}$. Somit ist $\phi^{-1}(\tilde{\Sigma})$
 eine Erzeugendenmenge von $Z(L^{\mathcal{C}})$. Es ist $\hat{z}_i = \phi^{-1}((z_{i,1}, 0)) + i\phi^{-1}((z_{i,2}, 0))$. Wir
 zeigen nun, daß $\lambda^{-1}(\phi^{-1}((z_{i,j}, 0))), 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq 2$, ein homogenes Element von
 $S_{\text{Int}}(L^{\mathcal{C}})$ ist. Seien $\{x_1, \dots, x_n\}, n \in \mathbb{N}$, eine Basis von L , $\check{k} : U(L)^{\mathcal{C}} \rightarrow U(L)^{\mathcal{C}}$,
 $\sum \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_n} (\varphi(x_1, 0))^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (\varphi(x_n, 0))^{\mu_n} \mapsto \sum \bar{\alpha}_{\mu_1, \dots, \mu_n} (\varphi(x_1, 0))^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (\varphi(x_n, 0))^{\mu_n}$
 und $\hat{k} : U(L^{\mathcal{C}}) \rightarrow U(L^{\mathcal{C}}), \sum \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_n} \varphi_C((x_1, 0))^{\mu_1} \cdot \dots \cdot \varphi_C((x_n, 0))^{\mu_n} \mapsto \sum \bar{\alpha}_{\mu_1, \dots, \mu_n}$
 $\varphi_C((x_1, 0))^{\mu_1} \cdot \dots \cdot \varphi_C((x_n, 0))^{\mu_n}, \alpha_{\mu_1, \dots, \mu_n} \in \mathbb{C}$. Dann gelten: $\check{k} \circ \phi = \phi \circ \hat{k}$ und
 $\check{k}((z_{i,j}, 0)) = (z_{i,j}, 0)$. Daraus folgt: $\phi^{-1}((z_{i,j}, 0)) = (\phi^{-1} \circ \check{k})((z_{i,j}, 0)) =$
 $\hat{k}(\phi^{-1}((z_{i,j}, 0)))$. Somit ist $\phi^{-1}((z_{i,j}, 0))$ ein reelles Polynom in $\varphi_C((x_1, 0)), \dots,$
 $\varphi_C((x_n, 0))$. Nun ist $\lambda^{-1}(\hat{z}_i) = (\lambda^{-1} \circ \phi^{-1})((z_{i,1}, 0)) + i(\lambda^{-1} \circ \phi^{-1})((z_{i,2}, 0))$
 homogen und damit ist auch der Real- und der Imaginärteil von dem Polynomausdruck

homogen. Damit ist $\lambda^{-1}(\phi^{-1}(z_{i_l}, 0))$ ein homogenes Element von $S_{\text{Int}}(L^{\mathcal{C}})$. Somit gibt es nach (1.8) eine Menge $\{\xi_1, \dots, \xi_l\}$, die in $\phi^{-1}(\tilde{\Sigma})$ enthalten und algebraisch unabhängig ist und $Z(L^{\mathcal{C}})$ erzeugt. Damit ist $\{(1_{U(L)}, 0), \phi(\xi_1), \dots, \phi(\xi_l)\}$ eine Erzeugendenmenge von $Z(L)^{\mathcal{C}}$, wobei $\phi(\xi_i)$ die folgende Gestalt hat: $\phi(\xi_i) = (z_i, 0)$, $z_i \in Z^+(L)$, $1 \leq i \leq l$. Daher ist $\{z_1, \dots, z_l\}$ eine algebraisch unabhängige Menge, die $Z^+(L)$ erzeugt. ■

(1.12) Korollar: Seien L und l wie in (1.11), $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, λ wie in (1.1) und $\{z_1, \dots, z_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, eine minimale Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ derart, daß $\lambda^{-1}(\phi^{-1}(z_i, 0))$, $1 \leq i \leq m$, homogen ist. Dann ist $m = l$ und $\{z_1, \dots, z_l\}$ algebraisch unabhängig.

Bew.: Sei ϕ wie in (1.10). Dann ist $\{\phi^{-1}((z_1, 0)), \dots, \phi^{-1}((z_m, 0))\}$ eine minimale Erzeugendenmenge von $Z^+(L^{\mathcal{C}})$. Da aus der algebraischen Unabhängigkeit von $\{\phi^{-1}((z_1, 0)), \dots, \phi^{-1}((z_m, 0))\}$ über $\mathcal{C}$ die algebraische Unabhängigkeit von $\{z_1, \dots, z_m\}$ über $\mathbb{R}$ folgt (vgl. (B.3)), genügt es nach (1.8) zu zeigen, daß $\lambda_{\mathcal{C}}^{-1}(\phi^{-1}((z_i, 0)))$, $1 \leq i \leq m$, ein homogenes Element von $S(L^{\mathcal{C}})$ ist; dabei ist $\lambda_{\mathcal{C}}: S(L^{\mathcal{C}}) \rightarrow U(L^{\mathcal{C}})$ der Vektorraum-Isomorphismus wie in (1.1). Seien $\mathcal{F}: L \rightarrow U(L)$ und $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}: L^{\mathcal{C}} \rightarrow U(L^{\mathcal{C}})$ wie in (1.10), $\tau: L \rightarrow S(L)$ bzw. $\tau_{\mathcal{C}}: L^{\mathcal{C}} \rightarrow S(L^{\mathcal{C}})$ die kanonische Einbettung von L in $S(L)$ bzw. von $L^{\mathcal{C}}$ in $S(L^{\mathcal{C}})$ (vgl. (B.13b)) und

$$\textcircled{1} : S(L^{\mathcal{C}}) \rightarrow S(L)^{\mathcal{C}} \quad \textcircled{2} (1_{S(L^{\mathcal{C}})}) := (1_{S(L)}, 0),$$

$$\textcircled{3} (\tau_{\mathcal{C}}((x_1, 0))^{v_1} \tau_{\mathcal{C}}((x_2, 0))^{v_2} \dots \tau_{\mathcal{C}}((x_n, 0))^{v_n}) := (\tau(x_1)^{v_1} \tau(x_2)^{v_2} \dots \tau(x_n)^{v_n}, 0),$$

$$v_1, \dots, v_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}, \tau_{\mathcal{C}}((x_i, 0))^0 := 1_{S(L^{\mathcal{C}})}, \tau(x_i)^0 := 1_{S(L)}, 1 \leq i \leq n. \text{ Dann ist}$$

$$\textcircled{4} \text{ ein Isomorphismus. Sei } y \in U(L) \text{ mit } y = \mathcal{F}(x_1)^{v_1} \mathcal{F}(x_2)^{v_2} \dots \mathcal{F}(x_n)^{v_n}.$$

Dann ist $(y, 0) \in U(L)^{\mathcal{C}}$ und $\phi^{-1}((y, 0)) = \mathcal{F}_{\mathcal{C}}((x_1, 0))^{v_1} \dots \mathcal{F}_{\mathcal{C}}((x_n, 0))^{v_n}$. Da die Elemente $\mathcal{F}(x_i)$ und $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}((x_i, 0))$, $1 \leq i \leq n$, unter sich dieselben Vertauschungsrelationen erfüllen, λ und $\lambda_{\mathcal{C}}$ analoge Operationsvorschriften darstellen und

$$\textcircled{5}^{-1}((\tau(x_i), 0)) = \textcircled{5}^{-1}((\lambda^{-1}(\mathcal{F}(x_i)), 0)) = \lambda_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathcal{F}_{\mathcal{C}}((x_i, 0))) \text{ ist, folgt:}$$

$$\textcircled{6}^{-1}((\lambda^{-1}(y), 0)) = \lambda_{\mathcal{C}}^{-1}(\phi^{-1}((y, 0))). \text{ Somit gilt für } z_i : \lambda_{\mathcal{C}}^{-1}(\phi^{-1}((z_i, 0))) = \textcircled{6}^{-1}((\lambda^{-1}(z_i), 0)). \text{ Daraus folgt, daß } \lambda_{\mathcal{C}}^{-1}(\phi^{-1}((z_i, 0))) \text{ homogen ist.} \quad \blacksquare$$

Mit $\textcircled{4}$ wie in dem Beweis von (1.12) kann man zeigen, daß $S_{\text{Int}}(L^{\mathcal{C}})$ isomorph ist zu $(S_{\text{Int}}(L))^{\mathcal{C}}$. Sei nämlich $\hat{d}_x: S(L)^{\mathcal{C}} \rightarrow S(L)^{\mathcal{C}}$, $\hat{d}_x((s_1, s_2)) := (d_x(s_1), d_x(s_2))$, $x \in L$, wobei d_x wie in (1.1) ist. Dann gilt: $\textcircled{5} \circ \hat{d}_x = \hat{d}_x \circ \textcircled{4}$. Daraus folgt mit (1.1) und (1.2): $\textcircled{5}(S_{\text{Int}}(L^{\mathcal{C}})) = (S_{\text{Int}}(L))^{\mathcal{C}}$; dabei ist L nicht notwendig halbeinfach.

Nun machen wir zwei Aussagen über das Zentrum der universellen einhüllenden Algebra einer Lie-Algebra, deren Voraussetzung nach (1.11) für endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebren über $\mathbb{K}$ immer erfüllt ist.

(1.13) Lemma: Seien L eine Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ und $\{z_1, \dots, z_l\}$, $l \in \mathbb{N}$, eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$. Dann gilt:

- $\{z_1, \dots, z_l\}$ ist eine minimale Erzeugendenmenge, d.h. kein Element von $\{z_1, \dots, z_l\}$ wird von den übrigen Elementen dieser Menge erzeugt.
- Jedes Element von $Z(L)$ wird in genau einer Weise von $\{1_{U(L)}, z_1, \dots, z_l\}$ erzeugt.

Bew.: a) und b) folgen sofort wegen der algebraischen Unabhängigkeit von $\{z_1, \dots, z_l\}$.

(1.14) Satz: Seien L und $\{z_1, \dots, z_l\}$ wie in (1.13). Dann ist

$$f: Z(L) \rightarrow \mathbb{K}[t_1, \dots, t_l], \quad f\left(\sum_{\nu_1, \dots, \nu_l \in \{0\} \cup \mathbb{N}} a_{\nu_1, \dots, \nu_l} z_1^{\nu_1} \dots z_l^{\nu_l}\right) = \\ = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l \in \{0\} \cup \mathbb{N}} a_{\nu_1, \dots, \nu_l} t_1^{\nu_1} \dots t_l^{\nu_l}$$

ein Isomorphismus.

Bew.: Wegen der erzeugenden Eigenschaft von $\{z_1, \dots, z_l\}$ und (1.13b) folgt sofort die Behauptung.

Wegen (1.14) gelten alle Aussagen über die Erzeugendenmengen von $\mathbb{K}^+[t_1, \dots, t_l]$ in (B.4)ff, (B.5) bis (B.8) entsprechend für $Z^+(L)$, die wir im folgenden Satz für halbeinfache Lie-Algebren zusammenfassen:

(1.15) Satz: Seien L eine endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ und l der Rang von L . Dann gilt:

- $Z^+(L)$ besitzt minimale Erzeugendenmengen, deren Mächtigkeit größer als 1 ist.
- Ist $\{z_1, \dots, z_l\}$ eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$, so ist $\{z_1, \dots, z_l\}$ eine algebraisch unabhängige Menge.
- Es gibt keine Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$, deren Mächtigkeit kleiner als 1 ist.
- Ist $\{z_1, \dots, z_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$, so ist $m = l$.
- Jede Untermenge von $Z(L)$, deren Mächtigkeit größer als 1 ist, ist algebraisch abhängig.

Nun beweisen wir einen Satz, der in der Literatur für endlichdimensionale Lie-Algebren über $\mathbb{C}$ bewiesen ist (vgl. [34; p.322]; in [49; p.145] wird für endlichdimensionale komplexe halbeinfache Lie-Algebren L bewiesen, daß $Z(L)$ isomorph ist zu $S_{\text{Int}}^{\wedge}(H)$, woraus mit (1.3)ff und (C.7)ff ebenfalls die folgende Aussage für $K = \mathbb{C}$ folgt).

(1.16) Satz: Sei L eine endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebra über K .

Dann gibt es einen Isomorphismus von $S_{\text{Int}}(L)$ auf $Z(L)$ vom Grad Null.

Bew.: Sei $K = \mathbb{C}$. Dann existiert zu $S_{\text{Int}}(L)$ bzw. zu $Z(L)$ nach (1.5)ff bzw. nach (1.7) eine algebraisch unabhängige Menge $\{I_1, \dots, I_l\}$, die mit $1_{S(L)}$ ganz $S_{\text{Int}}(L)$ erzeugt, bzw. $\{z_1, \dots, z_l\}$, die mit $1_{U(L)}$ ganz $Z(L)$ erzeugt; dabei ist l der Rang von L . Somit hat jedes Element von $S_{\text{Int}}(L)$ bzw. von $Z(L)$ eine eindeutige Polynomdarstellung in den Elementen von $\{I_1, \dots, I_l\}$ bzw. $\{z_1, \dots, z_l\}$ (vgl. (1.13b)).

Deshalb ist die Abbildung $f : S_{\text{Int}}(L) \rightarrow Z(L)$, $f\left(\sum_{\nu_1, \dots, \nu_l \in \{0\} \cup \mathbb{N}} a_{\nu_1, \dots, \nu_l} I_1^{\nu_1} \dots I_l^{\nu_l}\right) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_l \in \{0\} \cup \mathbb{N}} a_{\nu_1, \dots, \nu_l} z_1^{\nu_1} \dots z_l^{\nu_l}$ ein Isomorphismus. Sei nun $K = \mathbb{R}$. Dann genügt es wegen (1.11) zu zeigen, daß eine algebraisch unabhängige Untermenge $\{I_1, \dots, I_l\}$ von $S_{\text{Int}}(L)$ existiert, die mit $1_{S(L)}$ ganz $S_{\text{Int}}(L)$ erzeugt, denn damit kann man einen zu f analogen Isomorphismus erklären. Nach (1.11) besitzt $Z^+(L)$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge $\{z_1, \dots, z_l\}$. Nach (1.2) ist $\lambda^{-1}(z_i) \in S_{\text{Int}}(L)$, $1 \leq i \leq l$. Sei $\lambda^{-1}(z_i) = \sum_{j_i=1}^{n_i} s_{i,j_i}$, $n_i \in \mathbb{N}$, wobei s_{i,j_i} der homogene Anteil von $\lambda^{-1}(z_i)$

zu einem festen Grad ist. Dann ist $\sum := \{s_{i,j_i} \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j_i \leq n_i\}$ vereinigt mit $1_{S(L)}$ eine Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(L)$, denn mit $\lambda^{-1}(z_i)$ sind auch die homogenen Anteile von $\lambda^{-1}(z_i)$ Elemente von $S_{\text{Int}}(L)$. Sei $\sum^1$ eine minimale Untermenge von $\sum$, die mit $1_{S(L)}$ ganz $S_{\text{Int}}(L)$ erzeugt. Dann gilt mit $\{I_1, \dots, I_m\} := \sum^1$, $m \in \mathbb{N}$, nach (1.12)ff und nach dem Beweis von (1.12): $\bigoplus^{-1}((I_i, 0))$ ist ein homogenes Element von $S_{\text{Int}}(L^{\mathbb{C}})$, $1 \leq i \leq m$; dabei ist $(I_i, 0) \in (S_{\text{Int}}(L))^{\mathbb{C}}$. Daraus folgt mit (1.3)ff und (1.5) wegen der erzeugenden Eigenschaft und der Minimalität von $\{I_1, \dots, I_m\}$, wegen der Homogenität von $\bigoplus^{-1}((I_i, 0))$, $1 \leq i \leq m$, und wegen der Isomorphie-Eigenschaft von $\bigoplus$, daß $m = 1$ und $\{\bigoplus^{-1}((I_i, 0)) \mid 1 \leq i \leq l\}$ algebraisch unabhängig ist. Damit folgt wegen der Isomorphie-Eigenschaft von $\bigoplus$, daß $\{I_1, \dots, I_l\}$ algebraisch unabhängig ist. ■

Nun beweisen wir eine Aussage über das Zentrum der universellen einhüllenden Algebra einer endlichdimensionalen Lie-Algebra, die die direkte Lie-Algebra-Summe

*) Analog zum Beweis von (1.7) folgert man, daß f vom Grad Null ist.

von zwei Lie-Algebren ist. Diese Aussage ist von Bedeutung wegen der direkten Zerlegung einer endlichdimensionalen halbeinfachen Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ in einfache Lie-Algebren.

(1.17) Lemma: Seien L eine endlichdimensionale Lie-Algebra über $\mathbb{K}$, L_1 und L_2 Unterhalbgebren von L derart, daß $L = L_1 \oplus L_2$ ist (vgl. (B.17)), $\tau: L \rightarrow S(L)$ bzw. $\tau_i: L_i \rightarrow S(L_i)$, $i = 1, 2$, die kanonische Einbettung von L in $S(L)$ bzw. von L_i in $S(L_i)$, $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$ bzw. $\{\check{x}_1, \dots, \check{x}_m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$, eine Basis von L_1 bzw. eine Basis von L_2 und P der Algebra-Isomorphismus von $S(L)$ auf $S(L_1) \otimes S(L_2)$ mit $P(\sum_{\nu_1 \dots \nu_n} a_{\nu_1 \dots \nu_n} \tau(\hat{x}_1)^{\nu_1} \dots \tau(\hat{x}_n)^{\nu_n}) = \sum_{\nu_1 \dots \nu_n} a_{\nu_1 \dots \nu_n} \tau_1(\hat{x}_1)^{\nu_1} \dots \tau_1(\hat{x}_n)^{\nu_n} \otimes \tau_2(\check{x}_1)^{\mu_1} \dots \tau_2(\check{x}_m)^{\mu_m}$, $a_{\nu_1 \dots \nu_n} \mu_1 \dots \mu_m \in \mathbb{K}$. Dann gilt: $P(S_{\text{Int}}(L)) = S_{\text{Int}}(L_1) \otimes S_{\text{Int}}(L_2)$.

Bew.: Seien $d_{\hat{x}_i}$ die Derivation in $S(L_1)$ mit $d_{\hat{x}_i}(\tau_1(\hat{x}_j)) = \tau_1([\hat{x}_i, \hat{x}_j])$, $1 \leq i, j \leq n$, $d_{\check{x}_k}$ die Derivation in $S(L_2)$ mit $d_{\check{x}_k}(\tau_2(\check{x}_l)) = \tau_2([\check{x}_k, \check{x}_l])$, $1 \leq k, l \leq m$, und $r \in S(L_1) \otimes S(L_2)$. Dann hat r eine Darstellung von der folgenden Gestalt: $r = \sum_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} a_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} \tau_1(\hat{x}_1)^{\nu_1} \dots \tau_1(\hat{x}_n)^{\nu_n} \otimes \tau_2(\check{x}_1)^{\mu_1} \dots \tau_2(\check{x}_m)^{\mu_m}$ und es gilt: $(d_{\hat{x}_i} \otimes 1)(r) = \sum_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} a_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} (d_{\hat{x}_i}(\tau_1(\hat{x}_1)^{\nu_1} \dots \tau_1(\hat{x}_n)^{\nu_n}) \otimes \tau_2(\check{x}_1)^{\mu_1} \dots \tau_2(\check{x}_m)^{\mu_m}) = \sum_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} a_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} (\sum_{\rho_1 \dots \rho_n} b_{\nu_1 \dots \nu_n, \rho_1 \dots \rho_n}^i \tau_1(\hat{x}_1)^{\rho_1} \dots \tau_1(\hat{x}_n)^{\rho_n} \otimes \tau_2(\check{x}_1)^{\mu_1} \dots \tau_2(\check{x}_m)^{\mu_m}) = \sum_{\rho_1 \dots \rho_n, \mu_1 \dots \mu_m} c_{\rho_1 \dots \rho_n, \mu_1 \dots \mu_m}^i \tau_1(\hat{x}_1)^{\rho_1} \dots \tau_1(\hat{x}_n)^{\rho_n} \otimes \tau_2(\check{x}_1)^{\mu_1} \dots \tau_2(\check{x}_m)^{\mu_m}$ mit $d_{\hat{x}_i}(\tau_1(\hat{x}_1)^{\rho_1} \dots \tau_1(\hat{x}_n)^{\rho_n}) = \sum_{\rho_1 \dots \rho_n} b_{\nu_1 \dots \nu_n, \rho_1 \dots \rho_n}^i \tau_1(\hat{x}_1)^{\rho_1} \dots \tau_1(\hat{x}_n)^{\rho_n}$ und $\sum_{\nu_1 \dots \nu_n} a_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} b_{\nu_1 \dots \nu_n, \rho_1 \dots \rho_n}^i = c_{\rho_1 \dots \rho_n, \mu_1 \dots \mu_m}^i$. Sei nun $(d_{\hat{x}_i} \otimes 1)(r) = 0$.

Dann gilt: $c_{\rho_1 \dots \rho_n, \mu_1 \dots \mu_m}^i = 0$. Daraus folgt, daß für $(d_{\hat{x}_i} \otimes 1)(r) = 0$, $i = 1, 2, \dots$

gilt: $\sum_{\nu_1 \dots \nu_n} a_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} \tau_1(\hat{x}_1)^{\nu_1} \dots \tau_1(\hat{x}_n)^{\nu_n} \in S_{\text{Int}}(L_1)$ und damit $r \in S_{\text{Int}}(L_1) \otimes S(L_2)$. Somit folgt für $\hat{r} \in S(L_1) \otimes S(L_2)$ mit $(d_{\hat{x}_i} \otimes 1)(\hat{r}) = 0$ und $(1 \otimes d_{\check{x}_k})(\hat{r}) = 0$

$1 \leq i, k \leq n, m$ $\hat{r} \in S_{\text{Int}}(L_1) \otimes S(L_2) \cap S(L_1) \otimes S_{\text{Int}}(L_2)$. Sei nun $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ bzw. $\{I_\beta\}_{\beta \in B}$,

A und B Indexmengen, eine Basis von $S(L_1)$ bzw. von $S_{\text{Int}}(L_2)$. Dann hat $\hat{r}$ eine Darstellung von der folgenden Gestalt: $\hat{r} = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} S_\alpha \otimes I_\beta = \sum_{\beta} (\sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} S_\alpha) \otimes I_\beta$.

Es gilt: $0 = (d_{\hat{x}_i} \otimes 1)(\hat{r}) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta} (d_{\hat{x}_i}(S_\alpha)) \otimes I_\beta = \sum_{\alpha, \beta} (\sum_{\alpha'} a_{\alpha\beta} b_{\alpha\alpha'}^i S_{\alpha'}) \otimes I_\beta$ mit $d_{\hat{x}_i}(S_\alpha) = \sum_{\alpha' \in A} b_{\alpha\alpha'}^i S_{\alpha'}$. Daraus folgt: $\sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} b_{\alpha\alpha'}^i = 0, \alpha' \in A, \beta \in B$, und

$\widetilde{d_{x_i}^\vee}$ bzw. $\widetilde{d_{x_k}^\vee}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq k \leq m$, die Fortsetzung von $\text{ad } (\hat{x}_i)$ bzw. von $\text{ad } (\check{x}_k)$ als Derivation in $S(L)$. Dann gilt für $s \in S_{\text{Int}}(L)$: $\widetilde{d_{x_i}^\vee}(s) = \widetilde{d_{x_k}^\vee}(s) = 0$. s hat eine Darstellung von der folgenden Gestalt: $s = \sum b_{\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_1, \dots, \mu_m} \tau(\hat{x}_1)^{\nu_1} \dots \tau(\hat{x}_n)^{\nu_n} \tau(\check{x}_1)^{\mu_1} \dots \tau(\check{x}_m)^{\mu_m}$. Es ist $P(s) = \sum b_{\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_1, \dots, \mu_m} \tau_1(\hat{x}_1)^{\nu_1} \dots \tau_1(\hat{x}_n)^{\nu_n} \tau_2(\check{x}_1)^{\mu_1} \dots \tau_2(\check{x}_m)^{\mu_m}$. Es gilt offensichtlich: $(d_{x_i}^\vee \otimes 1)(P(s)) = (1 \otimes d_{x_k}^\vee)(P(s)) = 0$. Somit ist $P(s) \in S_{\text{Int}}(L_1) \otimes S_{\text{Int}}(L_2)$ und damit $P(S_{\text{Int}}(L)) \subseteq S_{\text{Int}}(L_1) \otimes S_{\text{Int}}(L_2)$. Daraus folgt die Behauptung, da die umgekehrte Inklusion trivial ist. ■

(1.18) Satz: Seien L , L_i , $i = 1, 2$, und P wie in (1.17) und $\lambda: S(L) \rightarrow U(L)$ bzw. $\lambda_i: S(L_i) \rightarrow U(L_i)$ der Vektorraum-Isomorphismus wie in (1.1). Dann ist $F := \lambda \circ P^{-1} \circ (\lambda_1 \otimes \lambda_2)^{-1}: U(L_1) \otimes U(L_2) \rightarrow U(L)$ ein Algebra-Isomorphismus und damit und mit (1.2) und (1.17) $Z(L)$ algebraisomorph zu $Z(L_1) \otimes Z(L_2)$.

Bew.: F ist nach (1.1) und (1.17) ein Vektorraum-Isomorphismus. Daher genügt es zu zeigen, daß F ein Algebra-Homomorphismus ist. Seien $\varphi: L \rightarrow U(L)$ bzw. $\varphi_i: L_i \rightarrow U(L_i)$, $i = 1, 2$, die Einbettung von L in $U(L)$ bzw. von L_i in $U(L_i)$, $u \in U(L_1)$ und $v \in U(L_2)$. Dann gibt es Polynome p und q mit $u = p(\varphi_1(\hat{x}_1), \dots, \varphi_1(\hat{x}_n))$ und $v = q(\varphi_2(\check{x}_1), \dots, \varphi_2(\check{x}_m))$. Es ist $\lambda_1^{-1}(u) = \tilde{p}(\tau_1(\hat{x}_1), \dots, \tau_1(\hat{x}_n))$ und $\lambda_2^{-1}(v) = \tilde{q}(\tau_2(\check{x}_1), \dots, \tau_2(\check{x}_m))$, wobei $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ Polynome und τ_1 und τ_2 wie in (1.17) sind. Nun gilt für $\hat{y}_i \in \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n\}$, $\check{y}_j \in \{\check{x}_1, \dots, \check{x}_m\}$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$, $r, s \in \mathbb{N}$, τ wie in (1.17): $\lambda(\tau(\hat{y}_1) \tau(\hat{y}_2) \dots \tau(\hat{y}_r) \tau(\check{y}_1) \dots \tau(\check{y}_s)) =$

$$= \frac{1}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \varphi(y_{\sigma(1)}) \cdot \varphi(y_{\sigma(2)}) \cdot \dots \cdot \varphi(y_{\sigma(r+s)}), \text{ wobei } (y_1, y_2, \dots, y_{r+s}) :=$$

$$= (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_r, \check{y}_1, \dots, \check{y}_s) \text{ ist. Daraus folgt wegen der Vertauschbarkeit von } \varphi(\hat{x}_k)$$

 mit $\varphi(\check{x}_l)$ (vgl. (B.17)), $1 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq m$:

$$\lambda(\tau(\hat{y}_1) \dots \tau(\hat{y}_r) \tau(\check{y}_1) \dots \tau(\check{y}_s)) = \frac{t}{(r+s)!} \sum_{\sigma \in S_r} \varphi(\hat{y}_{\sigma(r)}) \cdot \dots \cdot \varphi(\hat{y}_{\sigma(r)}).$$

(1)

$$\sum_{\sigma \in S_s} \varphi(\check{y}_{\sigma(s)}) \cdot \dots \cdot \varphi(\check{y}_{\sigma(s)}) \text{ mit } t \in \mathbb{N}.$$

Andererseits gilt (vgl. den Beweis von (1.7)):

$$\lambda(\tau(\hat{y}_1) \dots \tau(\hat{y}_r) \tau(\check{y}_1) \dots \tau(\check{y}_s)) = \lambda(\tau(\hat{y}_1) \dots \tau(\hat{y}_r)) \cdot \lambda(\tau(\check{y}_1) \dots \tau(\check{y}_s)) + z$$

(2)

mit $\text{grad}(z) < r + s$.

Aus (1) und (2) folgt: $\lambda(\tau(\hat{y}_1) \dots \tau(\hat{y}_r) \tau(\check{y}_1) \dots \tau(\check{y}_s)) = \lambda(\tau(\hat{y}_1) \dots \tau(\hat{y}_r)) \cdot \lambda(\tau(\check{y}_1) \dots \tau(\check{y}_s))$ und somit:

$$\begin{aligned} F(u \otimes v) &= (\lambda \circ P^{-1} \circ (\lambda_1 \circ \lambda_2)^{-1}) (p(\varphi_1(\hat{x}_1), \dots, \varphi_1(\hat{x}_n)) \otimes q(\varphi_2(\check{x}_1), \dots, \varphi_2(\check{x}_m))) \\ &= (\lambda \circ P^{-1}) (\tilde{p}(\tau_1(\hat{x}_1), \dots, \tau_1(\hat{x}_n)) \otimes \tilde{q}(\tau_2(\check{x}_1), \dots, \tau_2(\check{x}_m))) = \\ (3) \quad &= \lambda(\tilde{p}(\tau(\hat{x}_1), \dots, \tau(\hat{x}_n)) \tilde{q}(\tau(\check{x}_1), \dots, \tau(\check{x}_m))) = \\ &= \lambda(\tilde{p}(\tau(\hat{x}_1), \dots, \tau(\hat{x}_n))) \cdot \lambda(\tilde{q}(\tau(\check{x}_1), \dots, \tau(\check{x}_m))) = F(u \otimes 1) \cdot F(1 \otimes v). \end{aligned}$$

Seien nun $u_1 := \varphi_1(\hat{x}_1)^{\nu_1} \dots \varphi_1(\hat{x}_n)^{\nu_n}$ und $u_2 := \varphi_1(\hat{x}_1)^{\nu'_1} \dots \varphi_1(\hat{x}_n)^{\nu'_n}$ zwei Elemente der Birkhoff-Witt-Basis von $U(L_1)$ mit $\chi(\tau_1(\hat{x}_1), \dots, \tau_1(\hat{x}_n)) := \lambda_1^{-1}(u_1, u_2)$, wobei $\chi \in K[t_1, \dots, t_n]$. Dann gilt: $F(u_1 \cdot u_2 \otimes 1) = (\lambda \circ P^{-1} \circ (\lambda_1 \otimes \lambda_2)^{-1})(u_1 \cdot u_2 \otimes 1) = (\lambda \circ P^{-1})(\lambda_1^{-1}(u_1, u_2) \otimes 1) = \lambda(\chi(\tau(\hat{x}_1), \dots, \tau(\hat{x}_n))) = \varphi(\hat{x}_1)^{\nu_1} \dots \varphi(\hat{x}_n)^{\nu_n} \cdot \varphi(\hat{x}_1)^{\nu'_1} \dots \varphi(\hat{x}_n)^{\nu'_n} = F(u_1 \otimes 1) \cdot F(u_2 \otimes 1)$, da $F(\varphi_1(\hat{x}_1) \otimes 1) = \varphi(\hat{x}_1)$, $1 \leq i \leq n$, ist, die Elemente von $\{\varphi_1(\hat{x}_1), \dots, \varphi_1(\hat{x}_n)\}$ unter sich dieselben Vertauschungsrelationen erfüllen wie die Elemente von $\{\varphi(\hat{x}_1), \dots, \varphi(\hat{x}_n)\}$ und λ_1 und λ die analoge Abbildungsvorschrift haben. Analog gilt für zwei Basiselemente v_1 und v_2 von $U(L_2)$: $F(1 \otimes v_1, v_2) = F(1 \otimes v_1) \cdot F(1 \otimes v_2)$. Damit gilt für zwei Basiselemente $u_1 \otimes v_1$ und $u_2 \otimes v_2$ von $U(L_1) \otimes U(L_2)$ wegen (3): $F((u_1 \otimes v_1) \cdot (u_2 \otimes v_2)) = F(u_1 \cdot u_2 \otimes v_1 \cdot v_2) = F(u_1 \cdot u_2 \otimes 1) \cdot F(1 \otimes v_1 \cdot v_2) = F(u_1 \otimes 1) \cdot F(u_2 \otimes 1) \cdot F(1 \otimes v_1) \cdot F(1 \otimes v_2) = F(u_1 \otimes 1) \cdot F(1 \otimes v_1) \cdot F(u_2 \otimes 1) \cdot F(1 \otimes v_2) = F(u_1 \otimes v_1) \cdot F(u_2 \otimes v_2)$, da $F(u \otimes 1)$ mit $F(1 \otimes v)$, $u \in U(L_1)$, $v \in U(L_2)$, offensichtlich vertauscht. ■

In [50; LA3.2] wird für L und L_i , $i = 1, 2$, wie in (1.17) bewiesen, daß $U(L)$ algebraisomorph ist zu $U(L_1) \otimes U(L_2)$. Es läßt sich beweisen, daß der dort angegebene Isomorphismus dieselbe Wirkung hat wie F in (1.18). Ferner wird in [51; p.468] folgende Aussage bewiesen: Seien E und F zwei Algebren ungleich Null über K und Z bzw. Z' das Zentrum von E bzw. von F . Dann ist das Zentrum von $E \otimes F$ algebraisomorph zu $Z \otimes Z'$. Daraus folgt sofort (1.18). Unser Beweis von (1.18) ist aber einfacher und durchsichtiger als ein solcher, der über die erwähnte Aussage aus [51] zu führen wäre. Ferner ist in (1.18) die explizite Form des Algebra-Isomorphismus angegeben. Wir bemerken hier noch, daß mit (1.18) das Auf-

suchen des Zentrums der universellen einhüllenden Algebra auch einer reduktiven Lie-Algebra auf dasjenige von einfachen Lie-Algebren zurückgeführt worden ist.

Nun beweisen wir einen Satz, der eine Methode angibt, wie man aus algebraisch unabhängigen Erzeugendenmengen von $Z^+(L_1)$ und $Z^+(L_2)$ eine solche für $Z^+(L_1 \hat{\otimes} L_2)$ konstruieren kann.

(1.19) Satz: Seien L und L_i , $i = 1, 2$, wie in (1.17), F wie in (1.18) und $\{z_1, \dots, z_j\}$ bzw. $\{\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{j'}\}$, $1, j' \in \mathbb{N}$, eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L_1)$ bzw. von $Z^+(L_2)$. Dann ist $\{F(z_j \otimes 1), F(1 \otimes \hat{z}_{k'}) \mid 1 \leq j \leq j, 1 \leq k' \leq j'\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$. $\square$

Bew.: Dies folgt aus (1.14), (1.18) und (B.11). $\square$

Nun geben wir noch ein Verfahren zur Konstruktion von einigen Elementen des Zentrums der universellen einhüllenden Algebra einer endlichdimensionalen halbeinfachen Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ an. Dies ist eine Verallgemeinerung eines Verfahrens von RACAHA (vgl. [18; p.53]) und ist in [27] zu finden; dort ist das Verfahren aber nur für kompakte Lie-Algebren erklärt und der Beweis dazu ist mathematisch ungenau. Für den folgenden Satz (1.20) und den Beweis dazu ist zu beachten, daß man mit der darin definierten Matrix $(K_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ wie mit einem metrischen Tensor "Indizes ziehen" kann.

(1.20) Satz: Seien L eine endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{K}$, $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis von L , K die Killing-Form von L (vgl. (A.9)), $\tilde{K} := (K_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} := (K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq n}$,

$$K^{ij} := (\tilde{K}^{-1})_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad x^j := \sum_{i=1}^n K^{ji} x_i, \quad \varphi: L \rightarrow U(L) \text{ die kanonische}$$

Einbettung von L in $U(L)$, D eine endlichdimensionale Darstellung von L und $I_p(D) :=$

$$= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \text{spur} (D(x_{i_1}) \circ D(x_{i_2}) \circ \dots \circ D(x_{i_p})) \varphi(x^{i_1}) \circ \varphi(x^{i_2}) \circ \dots \circ \varphi(x^{i_p}),$$

$p \in \mathbb{N}$. Dann ist $I_p(D) \in Z^p(L)$.

*) Man kann mit Hilfe der Theorie der algebraischen Körperweiterungen zeigen, daß gilt: Sei $\tilde{\Sigma} := \{z_1, \dots, z_j\} \subset Z^+(L_1)$ bzw. $\hat{\Sigma} := \{\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{j'}\} \subset Z^+(L_2)$ (maximal) algebraisch unabhängig. Dann ist $F(\sum_{i=1}^j \otimes 1, U(L_1) \otimes \sum_{i=1}^{j'} \otimes 1) \subset Z^+(L)$ (maximal) alge-

Bew.: Seien c_{ij}^k , $1 \leq i, j, k \leq n$, die Strukturkonstanten von L bezüglich $\{x_1, \dots, x_n\}$

Dann gilt (vgl. (A.6d), (A.7)): $\widetilde{\text{ad}}(x_k) (I_p(D)) =$

$$= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \text{spur} (D(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_p})) K^{i_1 j_1 m} \varphi(x^{i_1}) \cdot \dots \cdot \varphi(x^{i_{p-1}}) \cdot$$

$$1 \leq m \leq p \quad \varphi([x_k, x_{j_m}]) \cdot \varphi(x^{i_{m+1}}) \cdot \dots \cdot \varphi(x^{i_p}) =$$

$$1 \leq j_m \leq n$$

$$= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p, j_m, r_m \leq n} \text{spur} (D(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_p})) K^{i_1 j_1 m} C_{kj_m}^{r_m} \varphi(x^{i_1}) \cdot \dots \cdot \varphi(x^{i_{p-1}}) \cdot$$

$$1 \leq m \leq p \quad \varphi(x_{r_m}) \cdot \varphi(x^{i_{m+1}}) \cdot \dots \cdot \varphi(x^{i_p}).$$

Nun ist $\sum_{r_m=1}^n K^{i_1 j_1 m} C_{kj_m}^{r_m} = C_{kj_m}^{j_m i_1 m} = \sum_{r=1}^n K^{r j_m} C_{rk}^{i_1 m}$, da C_{ijk} total antisymmetrisch ist. Daraus folgt: $\widetilde{\text{ad}}(x_k) (I_p(D)) =$

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p, r \leq n} \text{spur} (D(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_{m-1}}) \cdot C_{rk}^{i_m} D(x_{i_m}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_p})) \varphi(x^{i_1}) \cdot \dots \cdot$$

$$1 \leq m \leq p \quad \varphi(x^{i_{m-1}}) \cdot \varphi(x^r) \cdot \varphi(x^{i_{m+1}}) \cdot \dots \cdot \varphi(x^{i_p})$$

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n} \sum_{1 \leq m \leq p} \text{spur} (D(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_{m-1}}) \cdot D([x_{i_m}, x_k]) \cdot D(x_{i_{m+1}}) \cdot \dots \cdot$$

$$D(x_{i_p})) \varphi(x^{i_1}) \cdot \dots \cdot \varphi(x^{i_{m-1}}) \cdot \varphi(x^{i_m}) \cdot \varphi(x^{i_{m+1}}) \cdot \dots \cdot \varphi(x^{i_p}) = 0,$$

da $\sum_{1 \leq m \leq p} \text{spur} (D(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_{m-1}}) \cdot D([x_{i_m}, x_k]) \cdot D(x_{i_{m+1}}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_p})) =$

$$= \text{spur} (D(x_{i_1}) \cdot D(x_k) \cdot D(x_{i_2}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_p})) - \text{spur} (D(x_k) \cdot D(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_p})) +$$

$$+ \text{spur} (D(x_{i_1}) \cdot D(x_{i_2}) \cdot D(x_k) \cdot D(x_{i_3}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_p})) - \text{spur} (D(x_{i_1}) \cdot D(x_k) \cdot D(x_{i_2})$$

$$\cdot \dots \cdot D(x_{i_p})) + \dots + \text{spur} (D(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_p}) \cdot D(x_k)) - \text{spur} (D(x_{i_1})$$

$$\cdot \dots \cdot D(x_{i_{p-1}}) \cdot D(x_k) \cdot D(x_{i_p})) = - \text{spur} (D(x_k) \cdot D(x_{i_1}) \cdot \dots \cdot D(x_{i_p})) + \text{spur} (D(x_{i_1})$$

$$\cdot \dots \cdot D(x_{i_p}) \cdot D(x_k)) = 0. \text{ Damit ist die Behauptung bewiesen. } \blacksquare$$

Seien $\hat{D}_{jk} := \sum_{i=1}^n D(x_i)_{jk} \varphi(x^i)$, $1 \leq j, k \leq d$, wobei d die Dimension der Darstellung

D ist, und $\hat{D} := (\hat{D}_{jk})_{1 \leq j, k \leq d}$. Dann setzen wir: $I_p(D) := \text{spur} (\hat{D}^p) :=$

$$= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_p \leq d} \hat{D}_{j_1 j_2} \cdot \hat{D}_{j_2 j_3} \cdot \dots \cdot \hat{D}_{j_p j_1}. \text{ In dieser verkürzten Form geben wir die}$$

Casimir-Elemente von G_2 in 4.5 an. Seien nun $\tau: L \rightarrow S(L)$ die kanonische Einbettung

von L in die symmetrische Algebra $S(L)$, $\check{D}_{jk} := \sum_{i=1}^n D(x_i)_{jk} \tau(x^i)$ und $\check{I}_p(D) :=$

$$= \text{spur} (\check{D}^p), \text{ wobei } \check{D} := (\check{D}_{jk})_{1 \leq j, k \leq d} \text{ ist. Dann folgt analog zu dem Beweis von}$$

(1.20), daß $\check{I}_p(D) \in S_{\text{Int}}(L)$ ist. Deshalb ist wegen (1.2) das "symmetrisierte" Element $\lambda(\check{I}_p(D))$ ein Element von $Z(L)$ (vgl. (1.1)ff).

§ 2 Über das Zentrum der universellen einhüllenden Algebra einer reellen Form und der Reellifizierung einer endlichdimensionalen komplexen halbeinfachen Lie-Algebra

In diesem Paragraphen untersuchen wir einige Beziehungen zwischen dem Zentrum $Z(L)$ der universellen einhüllenden Algebra einer komplexen Lie-Algebra L und den Zentren $Z(L_U)$ bzw. $Z(L^{\mathbb{R}})$ der universellen einhüllenden Algebren einer reellen Form L_U (vgl. (2.2)) bzw. der Reellifizierung $L^{\mathbb{R}}$ (vgl. (2.1)) von L . In (2.3) zeigen wir, wie man aus einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge von $Z^+(L_U)$ (vgl. (1.6)) eine solche von $Z^+(L)$ leicht gewinnen kann. (2.4) gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für eine Untermenge von $Z(L_U)$, eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L_U)$ zu sein. In (2.5) bzw. (2.9) zeigen wir, wie man aus einer Erzeugendenmenge von $Z(L)$ eine solche von $Z(L_U)$ bzw. von $Z(L^{\mathbb{R}})$ gewinnen kann. Für L endlichdimensional und halbeinfach geben wir in (2.6) und dem Beweis davon bzw. in (2.10), (2.11) und dem Beweis davon ein Verfahren an, wie man aus einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ eine solche von $Z^+(L_U)$ bzw. von $Z^+(L^{\mathbb{R}})$ berechnen kann. In (2.12) führen wir den kanonischen Homomorphismus ψ von $U^+(L^{\mathbb{R}})$ auf $(U^+(L))^{\mathbb{R}}$ ein und zeigen damit in (2.14), wie man aus gewissen algebraisch unabhängigen Untermengen von $Z^+(L)$, die nach (2.11) für endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebren immer existieren, leicht solche für $Z^+(L^{\mathbb{R}})$ gewinnen kann.

Nun definieren wir die fundamentalen Begriffe dieses Paragraphen:

(2.1) Def.: Sei U eine Algebra über $\mathbb{C}$. Dann heißt U als reelle Algebra aufgefaßt die Reellifizierung von U , bezeichnet mit $U^{\mathbb{R}}$.

Ist $\{b_i | i \in I\}$, wobei I eine Menge ist, eine Basis von U , so ist $\{b_i, ib_i | i \in I\}$ eine Basis von $U^{\mathbb{R}}$. Deshalb ist $\dim(U^{\mathbb{R}}) = 2 \dim(U)$. Ist L eine komplexe Lie-Algebra und l der Rang von L , dann ist $2l$ der Rang von $L^{\mathbb{R}}$ (vgl. (A.4b)); ferner ist L genau dann halbeinfach bzw. einfach, wenn $L^{\mathbb{R}}$ halbeinfach bzw. einfach ist (vgl. [52; p.113]).

(2.2) Def.: Sei L eine Lie-Algebra über $\mathbb{C}$. Dann heißt eine Unter algebra L_U von $L^{\mathbb{R}}$ eine reelle Form von L , wenn es einen Algebra-Isomorphismus $\iota: L \rightarrow \iota(L_U)^{\mathbb{C}}$ gibt (vgl. (1.9)) mit $\iota(x) = (x, 0)$, $x \in L_U$.

Jede Basis von L_u ist auch eine Basis von L . Bekanntlich besitzt jede endlich-dimensionale komplexe halbeinfache Lie-Algebra eine reelle Form (vgl. z.B. [48; pp 147 - 149]).

Die folgenden zwei Sätze haben den gleichen Inhalt. (2.4) wird mit Hilfe von (2.3) bewiesen und ist für die Anwendungen in § 4 leicht zu handhaben.

(2.3) Satz: Seien L, L_u und $\mathfrak{l}$ wie in (2.2), $\phi : U((L_u)^{\mathbb{C}}) \rightarrow U(L_u)^{\mathbb{C}}$ der Isomorphismus wie in (1.10), φ bzw. φ_u bzw. φ_{uc} die kanonische Einbettung von L in $U(L)$ bzw. von L_u in $U(L_u)$ bzw. von $(L_u)^{\mathbb{C}}$ in $U((L_u)^{\mathbb{C}})$ (vgl. (A.6a)), I der Isomorphismus von $U(L)$ auf $U((L_u)^{\mathbb{C}})$ mit $(I \circ \varphi)(x) = (\varphi_{uc} \circ \iota)(x)$, $x \in L$, (vgl. (A.6c)), und $\{z_1, \dots, z_l\} \subset Z(L_u)$, $1 \leq l \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{z_1, \dots, z_l\}$ genau dann eine über $\mathbb{R}$ algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L_u)$, wenn $\{(I^{-1} \circ \phi^{-1})((z_1, 0)), \dots, (I^{-1} \circ \phi^{-1})((z_l, 0))\}$ eine über $\mathbb{C}$ algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ ist; dabei ist $(z_i, 0) \in Z(L_u)^{\mathbb{C}}$, $1 \leq i \leq l$.

Bew.: Es ist $Z^+(L_u)^{\mathbb{C}} = (Z^+(L_u), Z^+(L_u))$. Damit und wegen (B.3) ist $\{z_1, \dots, z_l\}$ genau dann eine über $\mathbb{R}$ algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L_u)$, wenn $\{(z_1, 0), \dots, (z_l, 0)\}$ eine über $\mathbb{C}$ algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L_u)^{\mathbb{C}}$ ist. Somit und mit der Isomorphieeigenschaft von $I^{-1} \circ \phi^{-1}$ folgt die Behauptung. ■

Es ist $\text{grad}(z_i) = \text{grad}((z_i, 0))$, $1 \leq i \leq l$ (vgl. (B.15)ff). Ferner folgt analog zu dem Beweis von (2.3), daß eine Untermenge $\sum$ von $Z^+(L_u)$ genau dann eine über $\mathbb{R}$ algebraisch unabhängige Menge ist, wenn $(I^{-1} \circ \phi^{-1})(\sum, 0)$ eine über $\mathbb{C}$ algebraische unabhängige Untermenge von $Z^+(L)$ ist. Somit gilt (2.3) offensichtlich für algebraisch unabhängige Erzeugendenmengen von $Z^+(L_u)$ beliebiger Mächtigkeit.

Das folgende Korollar ist für die Untersuchungen in § 4 von großem Nutzen. Dort geben wir l Elemente von $Z^+(L_u)$ an und beweisen mit (2.4), daß sie eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L_u)$ bilden.

(2.4) Korollar: Seien $L, L_u, \varphi, \varphi_u$ und $\{z_1, \dots, z_l\}$ wie in (2.3), k die identische Einbettung von L_u in L und K der reelle injektive Homomorphismus von $U(L_u)$ in $U(L)$ mit $(K \circ \varphi_u)(x) = (\varphi \circ k)(x)$, $x \in L_u$. Dann ist $\{z_1, \dots, z_l\}$ genau dann eine über $\mathbb{R}$ algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L_u)$, wenn $\{K(z_1), \dots, K(z_l)\}$ eine über $\mathbb{C}$ algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ ist.

Bew.: Sei $x \in L_u$. Dann ist $K(\varphi_u(x)) = \varphi(x) = (I^{-1} \circ \varphi_{uc} \circ \iota)(x) = I^{-1}(\varphi_{uc}((x, 0))) = (I^{-1} \circ \phi^{-1})((\varphi_u(x), 0))$. Daraus folgt, da z_i , $1 \leq i \leq l$, ein reelles Polynom in den φ_u -Bildern der Basiselemente von L_u ist, wegen der Homomorphieeigenschaft von K

und $I^{-1} \circ \phi^{-1} : K(z_i) = (I^{-1} \circ \phi^{-1})(z_i, 0)$, $1 \leq i \leq l$. Somit und mit (2.3) folgt die Behauptung. ■

Der folgende Satz zeigt, wie man aus einer Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ eine solche für $Z^+(L_U)$ gewinnen kann. Für endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebren kann man zusätzlich aus einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ eine solche für $Z^+(L_U)$ berechnen (vgl. den Beweis von (2.6)).

(2.5) Satz: Seien L eine komplexe Lie-Algebra, L_U eine reelle Form von L ,

$\varphi: L \rightarrow U(L)$ bzw. $\varphi_U: L_U \rightarrow U(L_U)$ die kanonische Einbettung von L in $U(L)$ bzw. von L_U in $U(L_U)$, $\{x_j | j \in J\}$, J eine Menge, eine Basis von L_U und damit von L und $\{z_1, \dots, z_l\}$, $l \in \mathbb{N}$, eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$, wobei

$$z_i = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in J \\ n \in \mathbb{N}}} a_{j_1 \dots j_n}^i \varphi(x_{j_1}) \cdot \varphi(x_{j_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(x_{j_n}), \quad a_{j_1 \dots j_n}^i \in \mathbb{C}, \quad 1 \leq i \leq l.$$

Dann ist die Menge $\{\hat{z}_{i1} := \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in J \\ n \in \mathbb{N}}} \operatorname{Re}(a_{j_1 \dots j_n}^i) \varphi_U(x_{j_1}) \cdot \varphi_U(x_{j_2}) \cdot \dots \cdot \varphi_U(x_{j_n}),$

$$\hat{z}_{i2} := \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in J \\ n \in \mathbb{N}}} \operatorname{Im}(a_{j_1 \dots j_n}^i) \varphi_U(x_{j_1}) \cdot \varphi_U(x_{j_2}) \cdot \dots \cdot \varphi_U(x_{j_n}) \mid 1 \leq i \leq l\}$$

Erzeugendenmenge von $Z^+(L_U)$.

Bew.: Da die Strukturkonstanten von L bezüglich der Basis $\{x_j | j \in J\}$ reell sind, sind mit z_i auch $z_{i1} := \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in J \\ n \in \mathbb{N}}} \operatorname{Re}(a_{j_1 \dots j_n}^i) \varphi(x_{j_1}) \cdot \dots \cdot \varphi(x_{j_n})$ und

$$z_{i2} := \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in J \\ n \in \mathbb{N}}} \operatorname{Im}(a_{j_1 \dots j_n}^i) \varphi(x_{j_1}) \cdot \dots \cdot \varphi(x_{j_n}) \quad \text{Elemente von } Z^+(L), \quad 1 \leq i \leq l.$$

Daraus folgt wegen der erzeugenden Eigenschaft von $\{z_i | 1 \leq i \leq l\}$, daß $\{z_{ik} | 1 \leq i \leq l, 1 \leq k \leq 2\}$ eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ ist. Seien nun $I: U(L) \rightarrow U((L_U)^\mathbb{C})$ wie in (2.3) und $\phi: U((L_U)^\mathbb{C}) \rightarrow U(L_U)^\mathbb{C}$ wie in (1.10). Dann ist $(\phi \circ I): U(L) \rightarrow U(L_U)^\mathbb{C}$ ein Isomorphismus mit $(\phi \circ I)(\varphi(x_j)) = (\varphi_U(x_j), 0)$, $j \in J$. Somit ist $\{(\phi \circ I)(z_{ik}) | 1 \leq i \leq l, 1 \leq k \leq 2\}$ eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L_U)^\mathbb{C}$ mit $(\phi \circ I)(z_{ik}) = (\hat{z}_{ik}, 0) \in (Z^+(L_U), 0)$. Damit ist $\{\hat{z}_{ik} | 1 \leq i \leq l, 1 \leq k \leq 2\}$ eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L_U)$. ■

Im allgemeinen ist z_i , $1 \leq i \leq l$, als ein Polynom in den φ -Bildern einer Basis

$\{\hat{x}_j \mid j \in J\}$ von L gegeben, die nicht eine Basis von L_u ist. Dann gibt es eine komplex-lineare Bijektion $t: L \rightarrow L$ mit $t(x_j) = \hat{x}_j$, $j \in J$. Damit wird z_i als ein Polynom in den φ -Bildern der Basis $\{x_j \mid j \in J\}$ dargestellt und wie in (2.5) vorgefahren, um eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L_u)$ zu bekommen. Ist $\{z_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}$ und $\text{card} \{\hat{z}_{ij}, 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq 2 \mid \hat{z}_{ij} \neq 0\} = 1$, dann ist $\{\hat{z}_{ij}, 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq 2 \mid \hat{z}_{ij} \neq 0\}$ algebraisch unabhängig über $\mathbb{R}$. Wir bemerken noch, daß (2.5) offensichtlich für Erzeugendenmengen beliebiger Mächtigkeit von $Z^+(L)$ gilt.

(2.6) **Satz:** Seien L eine endlichdimensionale komplexe halbeinfache Lie-Algebra, l der Rang von L und φ , L_u und φ_u wie in (2.5). Dann gibt es zu jeder Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, von L_u eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge $\{z_1, \dots, z_l\}$ von $Z^+(L)$ derart, daß z_i , $1 \leq i \leq l$, ein Polynom mit reellen Koeffizienten in den φ -Bildern der Elemente von $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{\hat{z}_{ij} \mid 1 \leq i \leq l\}$ (vgl. (2.5)) eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L_u)$ ist.

Bew.: Nach (1.5)ff und (1.7) gibt es eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge $\{\check{z}_1, \dots, \check{z}_l\}$ von $Z^+(L)$. Sei $B := \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von L_u . Dann ist B eine Basis von L und es gilt: $\sum := \{Re^B(\check{z}_i), Im^B(\check{z}_i) \mid 1 \leq i \leq l\}$ (vgl. (2.7)) ist ein

Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$. Daraus folgt wegen (1.7a), daß $\{1_{S(L)}\} \cup \lambda^{-1}(\sum)$ eine Erzeugendenmenge von $S_{Int}(L)$ ist. Nun sind die homogenen Anteile jedes Elementes von $\lambda^{-1}(\sum)$ wieder Elemente von $S_{Int}(L)$. Deshalb ist die Vereinigung aller homogener Anteile der Elemente von $\lambda^{-1}(\sum)$, die wir mit $\sum'$ bezeichnen, mit $1_{S(L)}$ eine

Erzeugendenmenge von $S_{Int}(L)$. Es gibt eine Untermenge $\sum''$ von minimaler Mächtigkeit von $\sum'$, die mit $1_{S(L)}$ ganz $S_{Int}(L)$ erzeugt. Wegen (1.3)ff, (1.4)ff und

(1.5) gilt: $\text{card}(\sum'') = 1$ und $\sum''$ ist eine algebraisch unabhängige Menge. Daraus folgt mit (1.7), daß $\lambda(\sum'')$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ ist. Wegen der Abbildungsvorschrift für λ (vgl. (1.1)) und da die Strukturkonstanten von L bezüglich B reell sind, sind die Koeffizienten des Polynomausdruckes von jedem Element von $\lambda(\sum'')$ in den φ -Bildern der Elemente von B reelle Zahlen. Deshalb und wegen (2.5) und (2.5)ff gilt die Behauptung.

Offensichtlich ist $\text{grad}(\hat{z}_{i1}) = \text{grad}(z_i)$, $1 \leq i \leq l$.

Nun definieren wir zwei Begriffe, die für die Berechnung der Elemente von $Z^+(L^{\mathbb{R}})$ aus denen von $Z^+(L)$ nützlich sind.

(2.7) Def.: Seien L eine komplexe Lie-Algebra, $B := \{x_j \mid j \in J\}$, J eine Menge, eine Basis von L derart, daß die Strukturkonstanten von L bezüglich B reelle Zahlen sind, und φ die kanonische Einbettung von L in $U(L)$. Dann setzen wir für

$$u = a + \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in J \\ n \in \mathbb{N}}} a_{j_1 \dots j_n} \varphi(x_{j_1}) \dots \varphi(x_{j_n}) \in U(L), \quad a, a_{j_1 \dots j_n} \in \mathbb{C}:$$

$$\overset{B}{\operatorname{Re}}(u) := \operatorname{Re}(a) + \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in J \\ n \in \mathbb{N}}} \operatorname{Re}(a_{j_1 \dots j_n}) \varphi(x_{j_1}) \dots \varphi(x_{j_n}) \quad \text{und}$$

$$\overset{B}{\operatorname{Im}}(u) := \operatorname{Im}(a) + \sum_{\substack{j_1, \dots, j_n \in J \\ n \in \mathbb{N}}} \operatorname{Im}(a_{j_1 \dots j_n}) \varphi(x_{j_1}) \dots \varphi(x_{j_n}).$$

Offensichtlich sind $\overset{B}{\operatorname{Re}}(u)$ und $\overset{B}{\operatorname{Im}}(u)$ unabhängig von der Gestalt des Polynomausdruckes für u in den φ -Bildern der Elemente von B . Sei $\hat{B}$ eine andere Basis von L derart, daß die Elemente von $\hat{B}$ durch eine reelle Transformation der Elemente von B ausgedrückt werden können. Dann gilt: $\overset{B}{\operatorname{Re}}(u) = \overset{\hat{B}}{\operatorname{Re}}(u)$ und $\overset{B}{\operatorname{Im}}(u) = \overset{\hat{B}}{\operatorname{Im}}(u)$.

Daraus folgt: Sei $\overset{B}{L}_u$ eine reelle Form von L und B eine Basis von $\overset{B}{L}_u$. Dann sind die Elemente $\overset{B}{\operatorname{Re}}(u)$ und $\overset{B}{\operatorname{Im}}(u)$ unabhängig von den Basen von $\overset{B}{L}_u$.

Wir entnehmen [52; p.117] folgende Aussage, die für (2.9) und (2.10) von wesentlicher Bedeutung ist:

(2.8) Satz: Seien L eine komplexe Lie-Algebra und $\mathcal{X}$ eine Konjugation von L , d.h. eine antilineare Abbildung von L auf L mit $\mathcal{X} \circ \mathcal{X} = \operatorname{id}_L$ und $\mathcal{X}([x, y]) = [\mathcal{X}(x), \mathcal{X}(y)]$, $x, y \in L$. Dann ist die Menge $L_u^{\mathcal{X}} := \{(x, \mathcal{X}(x)) \mid x \in L^{\mathbb{R}}\}$ versehen mit den Operationen in $L \hat{\otimes} L$ eine reelle Form von $L \hat{\otimes} L$ und die Abbildung $\varphi_{\mathcal{X}}^{\flat}: L^{\mathbb{R}} \rightarrow L_u^{\mathcal{X}}, \varphi_{\mathcal{X}}^{\flat}(x) := (x, \mathcal{X}(x))$ ein Isomorphismus.

Im folgenden Satz zeigen wir, wie man aus einer Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ eine solche von $Z^+(L^{\mathbb{R}})$ berechnen kann. Dieser Satz läßt sich mit (2.10) und (2.11) für halbeinfache Lie-Algebren verschärfen.

(2.9) Satz. Seien L eine endlichdimensionale komplexe Lie-Algebra, $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis von L , $\mathcal{K}$ eine Konjugation von L , $L_u^{\mathcal{K}}$ und $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ wie in (2.8).
 $B := \{\mathcal{V}_{\mathcal{K}}(x_j), \mathcal{V}_{\mathcal{K}}(ix_j) \mid 1 \leq j \leq n\}$, φ_R bzw. φ_u bzw. φ_+ die kanonische Einbettung von $L^{\mathbb{R}}$ in $U(L^{\mathbb{R}})$ bzw. von $L_u^{\mathcal{K}}$ in $U(L_u^{\mathcal{K}})$ bzw. von $L \ltimes L$ in $U(L \ltimes L)$,
 $k : L_u^{\mathcal{K}} \rightarrow L \ltimes L$ die identische Einbettung von $L_u^{\mathcal{K}}$ in $L \ltimes L$, $K : U(L_u^{\mathcal{K}}) \rightarrow U(L \ltimes L)$ der injektive Homomorphismus mit $(K \circ \varphi_u)(x) = (\varphi_+ \circ k)(x)$, $x \in L_u^{\mathcal{K}}$,
 $\tilde{K} : K(U(L_u^{\mathcal{K}})) \rightarrow U(L_u^{\mathcal{K}})$, $\tilde{K}(K(v)) = v$, $\bigoplus_{\mathcal{K}} : U(L^{\mathbb{R}}) \rightarrow U(L_u^{\mathcal{K}})$ der Isomorphismus mit $(\bigoplus_{\mathcal{K}} \circ \varphi_R)(y) = (\varphi_u \circ \mathcal{V}_{\mathcal{K}})(y)$, $y \in L^{\mathbb{R}}$, $F : U(L) \otimes U(L) \rightarrow U(L \ltimes L)$ der Isomorphismus wie in (1.18), $\{z_1, \dots, z_l\}$, $l \in \mathbb{N}$, eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ und $\sum := \left\{ \text{Re}(F(z_i \otimes 1)), \text{Re}(F(1 \otimes z_i)), \text{Im}(F(z_i \otimes 1)), \text{Im}(F(1 \otimes z_i)) \mid 1 \leq i \leq l \right\}$. Dann ist $(\bigoplus_{\mathcal{K}}^{-1} \circ \tilde{K})(\sum)$ eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L^{\mathcal{K}})$.

Bew.: B ist eine Basis von $L \ltimes L$ derart, daß die Strukturkonstanten von $L \ltimes L$ bezüglich B reelle Zahlen sind. Deshalb sind die Elemente von $\sum$ wohldefiniert. Ferner ist $\sum \subset K(U(L_u^{\mathcal{K}}))$. Nun ist $\{z_i \otimes 1, 1 \otimes z_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L) \otimes U(1) \otimes Z^+(L) \cup Z^+(L) \otimes Z^+(L)$. Daraus folgt wegen (1.18) und (2.5), daß $\tilde{K}(\sum)$ eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L_u^{\mathcal{K}})$ ist, denn $\tilde{K}$ ist ein Isomorphismus. Damit folgt die Behauptung wegen der Isomorphieeigenschaft von $\bigoplus_{\mathcal{K}}$. ■

Wir erläutern nun im folgenden wie man rechnerisch nach (2.9) aus einem Element $z \in Z^+(L)$ i.a. vier Elemente aus $Z^+(L^{\mathcal{K}})$ gewinnen kann: Seien $\varphi : L \rightarrow U(L)$ die kanonische Einbettung von L in $U(L)$ und $z =$

$$= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} a_{i_1 \dots i_m} \varphi(x_{i_1}) \dots \varphi(x_{i_m}), \quad a_{i_1 \dots i_m} \in \mathbb{C}, \quad x_{i_k} \in \{x_1, \dots, x_n\}$$

$1 \leq k \leq m$, $m \in \mathbb{N}$. Dann setzen wir:

$$\hat{z} := F(z \otimes 1) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} a_{i_1 \dots i_m} \varphi_+((x_{i_1}, 0)) \dots \varphi_+((x_{i_m}, 0)) \text{ und}$$

$$\check{z} := F(1 \otimes z) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} a_{i_1 \dots i_m} \varphi_+((0, x_{i_1})) \dots \varphi_+((0, x_{i_m})). \text{ Nun gilt}$$

$$(x_j, 0) = \frac{1}{2}(\mathcal{V}_{\mathcal{K}}(x_j) - i\mathcal{V}_{\mathcal{K}}(ix_j)) \text{ und } (0, x_j) = \frac{1}{2}(\mathcal{V}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(x_j)) - i\mathcal{V}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}(ix_j))),$$

$1 \leq j \leq n$. Damit ist

$$\hat{z} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{z}\right)^m a_{i_1 \dots i_m} ((\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(x_{i_1}) - i(\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(ix_{i_1})) \dots ((\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(x_{i_m}) - i(\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(ix_{i_m}))$$

$$(x_{i_m}) - i(\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(ix_{i_m})) \text{ und } \check{z} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{z}\right)^m a_{i_1 \dots i_m} ((\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(x_{i_1}) - i(\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(ix_{i_1})) \dots ((\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(x_{i_m}) - i(\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(ix_{i_m}))$$

$$(\mathcal{X}(x_{i_1}) - i(\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(\mathcal{X}(ix_{i_1}))) \dots ((\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(\mathcal{X}(x_{i_m}) - i(\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(\mathcal{X}(ix_{i_m}))).$$

Nun kann man $\text{Re}(\hat{z})$, $\text{Im}(\hat{z})$, $\text{Re}(\check{z})$ und $\text{Im}(\check{z})$ ausrechnen. Sei $B_{\mathcal{X}} := \{ \psi_{\mathcal{X}}^j(\mathcal{X}(x_j)) , \psi_{\mathcal{X}}^j(\mathcal{X}(ix_j)) \mid 1 \leq j \leq n \}$. Dann ist $B_{\mathcal{X}}$ eine Basis von $L_{\mathcal{U}}^{\mathcal{X}}$ und die Elemente von $B_{\mathcal{X}}$ erfüllen dieselben Vertauschungsrelationen wie die Elemente von B . Daraus folgt:

$$\text{Ist } \text{Re}(\hat{z}) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} b_{i_1 \dots i_m} (\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(y_{i_1}) \dots (\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(y_{i_m}),$$

$$b_{i_1 \dots i_m} \in \mathbb{R}, y_{i_k} \in \{x_j, ix_j \mid 1 \leq j \leq n\}, 1 \leq k \leq m, m \in \mathbb{N}, \text{ so ist } \text{Re}^{\check{z}}(\check{z}) =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} b_{i_1 \dots i_m} (\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(\mathcal{X}(y_{i_1})) \dots (\varphi_+ \circ \psi_{\mathcal{X}})(\mathcal{X}(y_{i_m})).$$

Somit gilt:

$$(\oplus_{\mathcal{X}}^{-1} \circ \tilde{K})^B(\text{Re}(\hat{z})) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} b_{i_1 \dots i_m} \varphi_R(y_{i_1}) \dots \varphi_R(y_{i_m}) \in Z^+(\mathbb{L}^{\mathcal{R}})$$

$$\text{und } (\oplus_{\mathcal{X}}^{-1} \circ \tilde{K})^{B_{\mathcal{X}}}(\text{Re}(\check{z})) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} b_{i_1 \dots i_m} \varphi_R(\mathcal{X}(y_{i_1})) \dots \varphi_R(\mathcal{X}(y_{i_m}))$$

$\in Z^+(\mathbb{L}^{\mathcal{R}})$. Analoges gilt für $\text{Im}(\hat{z})$ und $\text{Im}(\check{z})$. Es sei noch bemerkt, daß offensichtlich (2.9) für komplexe Lie-Algebren beliebiger Dimension und für Erzeugendengruppen beliebiger Mächtigkeit von $Z^+(L)$ gilt.

Nun beweisen wir einen Satz, dessen Voraussetzungen für alle komplexen einfachen Lie-Algebren, die wir in § 4 untersuchen, erfüllt sind.

(2.10) Satz: Seien L eine endlichdimensionale komplexe Lie-Algebra, $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Basis von L derart, daß die Strukturkonstanten von L bezüglich $\{x_1, \dots, x_n\}$ reell sind, $\varphi: L \rightarrow U(L)$ die kanonische Einbettung von L in $U(L)$, $\{z_1, \dots, z_1\}$, $1 \in \mathbb{N}$, eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $\mathbb{Z}^+(L)$ derart, daß z_i , $1 \leq i \leq 1$, ein reeller Polynomausdruck in den Elementen von $\{\varphi(x_j) \mid 1 \leq j \leq n\}$ ist, $L_u^\mathcal{X}$ und $\mathcal{V}_\mathcal{X}$ wie in (2.8) mit der Konjugation $\mathcal{X}: L \rightarrow L$, $\mathcal{X}(\sum_{j=1}^n a_j x_j) := \sum_{j=1}^n \bar{a}_j x_j$, $a_j \in \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq n$, und B , F , $\ominus_\mathcal{X}$ und $\tilde{K}$ wie in (2.9). Dann ist $\{(\ominus_\mathcal{X}^{-1} \circ \tilde{K}) (Re(F(z_i \otimes 1)))$, $(\ominus_\mathcal{X}^{-1} \circ \tilde{K}) (Im(F(z_i \otimes 1))) \mid 1 \leq i \leq 1\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $\mathbb{Z}^+(L^{\mathbb{R}})$.

Bew.: Sei $z_i = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} a_{i_1 \dots i_m}^i \varphi(x_{i_1}) \dots \varphi(x_{i_m})$, $a_{i_1 \dots i_m}^i \in \mathbb{R}$, $x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \in \{x_1, \dots, x_n\}$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 1$. Dann gilt wegen $\mathcal{X}(x_j) = x_j$, $\mathcal{X}(ix_j) = -ix_j$, $1 \leq j \leq n$, nach (2.9)ff: $\hat{z}_i = F(z_i \otimes 1) =$
 $= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} (\frac{1}{2})^m a_{i_1 \dots i_m}^i ((\varphi_+ \circ \mathcal{V}_\mathcal{X})(x_{i_1}) - i(\varphi_+ \circ \mathcal{V}_\mathcal{X})(ix_{i_1})) \dots ((\varphi_+ \circ \mathcal{V}_\mathcal{X})(x_{i_m}) - i(\varphi_+ \circ \mathcal{V}_\mathcal{X})(ix_{i_m}))$, $\check{z}_i = F(1 \otimes z_i) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} (\frac{1}{2})^m a_{i_1 \dots i_m}^i ((\varphi_+ \circ \mathcal{V}_\mathcal{X})(x_{i_1}) + i(\varphi_+ \circ \mathcal{V}_\mathcal{X})(ix_{i_1})) \dots ((\varphi_+ \circ \mathcal{V}_\mathcal{X})(x_{i_m}) + i(\varphi_+ \circ \mathcal{V}_\mathcal{X})(ix_{i_m}))$.
Daraus folgt: $Re(\hat{z}_i) = Re(\check{z}_i)$, $Im(\hat{z}_i) = -Im(\check{z}_i)$. Somit ist nach (2.9)
 $\sum \mathbb{R} = \{(\ominus_\mathcal{X}^{-1} \circ \tilde{K}) (Re(\hat{z}_i)), (\ominus_\mathcal{X}^{-1} \circ \tilde{K}) (Im(\hat{z}_i)) \mid 1 \leq i \leq 1\}$ eine Erzeugendenmenge von $\mathbb{Z}^+(L^{\mathbb{R}})$. Nun ist nach (1.19) $\{\hat{z}_i, \check{z}_i \mid 1 \leq i \leq 1\}$ eine algebraisch unabhängige Menge. Es gilt: $Re(\hat{z}_i) = \frac{1}{2} (\hat{z}_i + \check{z}_i)$ und $Im(\hat{z}_i) = -i/2 (\hat{z}_i - \check{z}_i)$.

Daraus folgt wegen (1.14) und wegen der aus [53; p.134] im Beweis von (B.6) zitierten Aussage, daß $\{Re(\hat{z}_i), Im(\hat{z}_i) \mid 1 \leq i \leq 1\}$ eine algebraisch unabhängige Untermenge von $\mathbb{Z}^+(L \oplus L)$ ist. Daraus folgt die algebraische Unabhängigkeit

von $\sum \mathbb{R}$, denn $K \circ \Theta_{\mathcal{K}}$ ist ein injektiver Homomorphismus. ■

Offensichtlich ist $\text{grad}((\Theta_{\mathcal{K}}^{-1} \circ \tilde{K})(\overset{B}{\text{Re}}(F(z_i \otimes 1)))) = \text{grad}((\Theta_{\mathcal{K}}^{-1} \circ \tilde{K})(\overset{B}{\text{Im}}(F(z_i \otimes 1)))) = \text{grad}(z_i), 1 \leq i \leq l$.

Nach (1.15b d) genügt es für halbeinfache Lie-Algebren in (2.10) zu beweisen, daß $\sum \mathbb{R}$ eine Erzeugendenmenge von $Z^+(L^{\mathbb{R}})$ ist, da der Rang von $L^{\mathbb{R}}$ gleich 2 l ist, wenn l der Rang von L ist. Mit (2.10) und (2.9)ff kann man für die Zentren $Z(L^{\mathbb{R}})$ der universellen einhüllenden Algebren der Reellifizierungen $L^{\mathbb{R}}$ aller komplexen einfachen Lie-Algebren Laus § 4 algebraisch unabhängige Mengen berechnen, die mit $1_{U(L)}$ ganz $Z(L^{\mathbb{R}})$ erzeugen.

Als Beispiel berechnen wir im folgenden eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))^{\mathbb{R}}$. Dabei identifizieren wir für die folgende Rechnung die φ , φ_R , φ_+ und k -Bilder der Elemente der zu betrachtenden Algebren mit ihren Urbildern (vgl. § 4). Nach (4.1.6) wird $Z^+(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ von $z_2 = \sum_{1 \leq i_1, i_2 \leq l}$

$$\begin{aligned} x_{i_1 i_2} \cdot x_{i_2 i_1} \text{ erzeugt. Daraus folgt: } F(z_2 \otimes 1) &= 2(x_{11}, 0)^2 + (x_{12}, 0) \cdot (x_{21}, 0) + \\ &+ (x_{21}, 0) \cdot (x_{12}, 0) = \frac{1}{2} (x_{11}, x_{11})^2 - i(x_{11}, x_{11}) \cdot (ix_{11}, -ix_{11}) - \frac{1}{2} (ix_{11}, -ix_{11})^2 + \\ &+ \frac{1}{4} (x_{12}, x_{12}) \cdot (x_{21}, x_{21}) - i \frac{1}{4} (x_{12}, x_{12}) \cdot (ix_{21}, -ix_{21}) - i \frac{1}{4} (ix_{12}, -ix_{12}) \cdot (x_{21}, x_{21}) - \\ &- \frac{1}{4} (ix_{12}, -ix_{12}) \cdot (ix_{21}, -ix_{21}) + \frac{1}{4} (x_{21}, x_{21}) \cdot (x_{12}, x_{12}) - i \frac{1}{4} (x_{21}, x_{21}) \cdot \\ &(ix_{12}, -ix_{12}) - i \frac{1}{4} (ix_{21}, -ix_{21}) \cdot (x_{12}, x_{12}) - \frac{1}{4} (ix_{21}, -ix_{21}) \cdot (ix_{12}, -ix_{12}). \end{aligned}$$

Somit gilt: $\Theta_{\mathcal{K}}^{-1}(\overset{B}{\text{Re}}(F(z_2 \otimes 1))) = \frac{1}{2} (x_{11}^2 - (ix_{11})^2) + \frac{1}{4} (x_{12} \cdot x_{21} - (ix_{12}) \cdot (ix_{21}) + x_{21} \cdot x_{12} - (ix_{21}) \cdot (ix_{12}))$ und $\Theta_{\mathcal{K}}^{-1}(\overset{B}{\text{Im}}(F(z_2 \otimes 1))) = -x_{11} \cdot (ix_{11}) - \frac{1}{4} (x_{12} \cdot (ix_{21}) + (ix_{12}) \cdot x_{21} + x_{21} \cdot (ix_{12}) + (ix_{21}) \cdot x_{12})$. Nach (2.10) ist

$\{\Theta_{\mathcal{K}}^{-1}(\overset{B}{\text{Re}}(F(z_2 \otimes 1))), \Theta_{\mathcal{K}}^{-1}(\overset{B}{\text{Im}}(F(z_2 \otimes 1)))\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))^{\mathbb{R}}$.

Wir vergleichen diese mit einer entsprechenden Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathcal{V}(3, 1; \mathbb{R}))$, da $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))^{\mathbb{R}}$ isomorph ist zu $\mathcal{V}(3, 1; \mathbb{R})$ (vgl. [52; p.121]). Nach (4.4.7) ist $\{z_2^1, z_2^2\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathcal{V}(3, 1; \mathbb{R}))$.

Es ist $z_2^1 = 2 ((N_{14}^1)^2 + (N_{24}^1)^2 + (N_{34}^1)^2 - (N_{12}^1)^2 - (N_{13}^1)^2 - (N_{23}^1)^2)$ und

$$z_2^1 = -8N_{13}^1 \cdot N_{24}^1 + 4(N_{12}^1 \cdot N_{34}^1 + N_{14}^1 \cdot N_{23}^1 + N_{23}^1 \cdot N_{14}^1 + N_{34}^1 \cdot N_{12}^1).$$

Sei f die lineare Abbildung von $\mathcal{V}(3,1;\mathbb{R})$ auf $(\mathcal{L}(2,\mathbb{C}))^{\mathbb{R}}$ mit

$$f(N_{24}^1) := x_{11}, \quad f(N_{13}^1) := -(ix_{11}), \quad f(N_{34}^1) := \frac{1}{2}((ix_{21}) - (ix_{12})),$$

$$f(N_{23}^1) := \frac{1}{2}((ix_{21}) + (ix_{12})), \quad f(N_{14}^1) := \frac{1}{2}(x_{12} + x_{21}) \text{ und } f(N_{12}^1) :=$$

$$\frac{1}{2}(x_{12} - x_{21}). \text{ Dann ist } f \text{ ein Isomorphismus. Nach (A.6c) l\"{a}sst sich } f \text{ eindeutig}$$

fortsetzen zu einem Isomorphismus von $U(\mathcal{V}(3,1;\mathbb{R}))$ auf $U((\mathcal{L}(2,\mathbb{C}))^{\mathbb{R}})$, den

wir wieder mit f bezeichnen. Die Rechnung ergibt: $f(z_2^1) = 4 \oplus_{\mathcal{L}}^{-1}(\text{Re}^B(F(z_2 \otimes 1)))$

$$\text{und } f(z_2^1) = -8 \oplus_{\mathcal{L}}^{-1}(\text{Im}(F(z_2 \otimes 1))).$$

Der folgende Satz zeigt, daß man für halbeinfache Lie-Algebren stets aus einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ eine solche von $Z^+(L^{\mathbb{R}})$ berechnen kann. Dieses Rechenverfahren, das i.a. in der Anwendung sehr mühsam ist, kann man dem Beweis von (2.10) entnehmen.

(2.11) Satz: Seien L eine endlichdimensionale komplexe halbeinfache Lie-Algebra, l der Rang von L und $\mathcal{V}: L \rightarrow U(L)$ die kanonische Einbettung von L in $U(L)$. Dann gibt es eine Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, von L und eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge $\{z_1, \dots, z_l\}$ von $Z^+(L)$ derart, daß die Strukturkonstanten von L bezüglich $\{x_1, \dots, x_n\}$ reell sind und z_i , $1 \leq i \leq l$ ein reeller Polynomausdruck in den Elementen von $\{\mathcal{V}(x_j) \mid 1 \leq j \leq n\}$ ist.

Bew.: Nach [48; p.147] besitzt L eine reelle kompakte Form. Somit gibt es eine Basis B von L derart, daß die Strukturkonstanten von L bezüglich B reell sind. Der Rest des Beweises ist analog zu dem Beweis von (2.6). ■

Die folgenden zwei Aussagen dienen dazu, (2.14) zu beweisen. Dort wird gezeigt, wie man ohne Mühe aus gewissen algebraisch unabhängigen Untermengen von $Z^+(L)$, die für halbeinfache Lie-Algebren immer existieren (vgl. (2.11)), solche von $Z^+(L^{\mathbb{R}})$ gewinnen kann.

(2.12) Satz: Seien L eine komplexe Lie-Algebra, $\{x_i \mid i \in I\}$, I eine geordnete Menge, eine Basis von L und $\mathcal{V}: L \rightarrow U(L)$ bzw. $\mathcal{V}_R: L^{\mathbb{R}} \rightarrow U(L^{\mathbb{R}})$ die kanonische Einbettung von L in $U(L)$ bzw. von $L^{\mathbb{R}}$ in $U(L^{\mathbb{R}})$. Dann ist die reelle lineare Abbildung $\Psi: U^+(L^{\mathbb{R}}) \rightarrow (U^+(L))^{\mathbb{R}}$, $\Psi(\mathcal{V}_R(x_i)^{\mu_i} \mathcal{V}_R(ix_{i'})^{\mu_{i'}})$

$$\dots \varphi_R(x_{i_n})^{\nu_n} \cdot \varphi_R(ix_{i_n})^{\mu_n} := \varphi(x_{i_1})^{\nu_1} \cdot \varphi(ix_{i_1})^{\mu_1} \dots \varphi(x_{i_n})^{\nu_n}.$$

$$\varphi(ix_{i_n})^{\mu_n}, i_k \in I, (\nu_k, \mu_k) \in \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n, i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n,$$

$(\nu_1, \mu_1, \dots, \nu_n, \mu_n) \neq (0, 0, \dots, 0, 0), n \in \mathbb{N}$, ein surjektiver Homomorphismus.

Bew.: Da $U^+(L^{\mathbb{R}})$ bzw. $(U^+(L))^{\mathbb{R}}$ ein Ideal in $U(L^{\mathbb{R}})$ bzw. in $U(L)^{\mathbb{R}}$ ist (vgl. (1.6)ff) und jedes Monom von der Gestalt des Argumentes von ψ der Birkhoff-Witt-Basis von $U(L^{\mathbb{R}})$ angehört und deshalb die Menge dieser Monome eine Basis von $U^+(L^{\mathbb{R}})$ bildet, ist ψ als lineare Abbildung wohldefiniert. Wir betrachten die reelle Abbildung $\hat{\varphi}: L^{\mathbb{R}} \rightarrow (U(L)^{\mathbb{R}})_L$ (vgl. (A.5)ff), $\hat{\varphi}(x) := \varphi(x)$. Wegen $L = L^{\mathbb{R}}$ und $U(L) = U(L)^{\mathbb{R}}$ ist $\hat{\varphi}$ ein Homomorphismus. Damit und nach (A.6b) gibt es genau einen Homomorphismus $\hat{\psi}: U(L^{\mathbb{R}}) \rightarrow U(L)^{\mathbb{R}}$ mit $\hat{\psi}(x) = (\hat{\varphi} \circ \varphi_R)(x), x \in L^{\mathbb{R}}$. Daraus folgt, daß $\hat{\psi}|_{U^+(L^{\mathbb{R}})} = \psi$ ein Homomorphismus ist. Nun zeigen wir, daß ψ surjektiv ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß ψ eine lineare Abbildung ist, daß zu jedem Monom aus $(U^+(L))^{\mathbb{R}}$ ein Urbild unter ψ existiert. O.E.d.A. sei ein Monom von der folgenden Gestalt gewählt: $a_{\nu_1 \dots \nu_n} \varphi(x_1)^{\nu_1} \dots \varphi(x_n)^{\nu_n} \in (U^+(L))^{\mathbb{R}} = U^+(L), x_1, \dots, x_n \in L, a_{\nu_1 \dots \nu_n} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein $j \in \{1, \dots, n\}$ derart, daß $\nu_j \neq 0$ ist. Daraus folgt, daß $\varphi(ix_j) = i \varphi(x_j)$ ist, daß $\text{Re}(a_{\nu_1 \dots \nu_n}) \varphi_R(x_1)^{\nu_1} \dots \varphi_R(x_n)^{\nu_n} + \text{Im}(a_{\nu_1 \dots \nu_n}) \varphi_R(x_1)^{\nu_1} \dots \varphi_R(x_{j-1})^{\nu_{j-1}} \cdot \varphi_R(x_j)^{\nu_j-1} \cdot \varphi_R(ix_j)^{\nu_j} \cdot \varphi_R(x_{j+1})^{\nu_{j+1}} \dots \varphi_R(x_n)^{\nu_n}$ ein gesuchtes Urbild ist. ■

(2.13) Lemma: Seien L eine endlichdimensionale komplexe Lie-Algebra, $\{x_1, \dots, x_n\}, n \in \mathbb{N}$, eine Basis von L derart, daß die Strukturkonstanten von L bezüglich $\{x_1, \dots, x_n\}$ reell sind, $\varphi_R: L^{\mathbb{R}} \rightarrow U(L^{\mathbb{R}})$ die kanonische Einbettung von $L^{\mathbb{R}}$ in $U(L^{\mathbb{R}})$, $\widetilde{\text{ad}}_R(x), x \in L^{\mathbb{R}}$, die Derivation von $U(L^{\mathbb{R}})$ mit $\widetilde{\text{ad}}_R(x)(\varphi_R(x_j)) = \varphi_R([x, x_j]),$ (vgl. (A.6d), (A.7)), $1 \leq j \leq n$, und $\widetilde{\text{ad}}_R(x_j)(\varphi_R(x_{i_1}) \dots \varphi_R(x_{i_p})) = : \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} b_{i_1 \dots i_p, \nu_1 \dots \nu_n}^j \varphi_R(x_1)^{\nu_1} \dots \varphi_R(x_n)^{\nu_n}$

$\varphi_R(x_1)^{\nu_1} \dots \varphi_R(x_n)^{\nu_n}$, wobei $p \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$,

$b_{i_1 \dots i_p, \nu_1 \dots \nu_n}^j \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\widetilde{\text{ad}}_R(x_j)(\varphi_R(x_{i_1}) \dots \varphi_R(x_{i_p})) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} b_{i_1 \dots i_p, \nu_1 \dots \nu_n}^j \varphi_R(x_1)^{\nu_1} \dots \varphi_R(x_k)^{\nu_k-1} \cdot \varphi_R(ix_k)^{\nu_k} \dots \varphi_R(x_n)^{\nu_n}, \text{ dabei ist } k \in \{1, \dots, n\} \text{ und ab-}$$

Bew.: Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion nach p . Für $p = 1$

ist die Behauptung richtig. Es gelte nun: $\widetilde{\text{ad}}_R(\text{ix}_j) (\varphi_R(x_{i_1}) \dots \varphi_R(x_{i_{p-1}})) =$

$$= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} b_{i_1, \dots, i_{p-1}, \nu_1, \dots, \nu_n}^j \varphi_R(x_{i_1})^{\nu_1} \dots \varphi_R(x_{i_k})^{\nu_k-1} \cdot \varphi_R(x_{i_k})$$

..... $\varphi_R(x_n)^{\nu_n}$. Daraus folgt:

$$\widetilde{\text{ad}}_R(\text{ix}_j) (\varphi_R(x_{i_1}) \dots \varphi_R(x_{i_{p-1}}) \cdot \varphi_R(x_{i_p})) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} b_{i_1, \dots, i_{p-1}, \nu_1, \dots, \nu_n}^j$$

(1)

$$\varphi_R(x_{i_1})^{\nu_1} \dots \varphi_R(x_{i_k})^{\nu_k-1} \cdot \varphi_R(x_{i_k}) \dots \varphi_R(x_n)^{\nu_n} \cdot \varphi_R(x_{i_p}) + \varphi_R(x_{i_1}) \dots \varphi_R(x_{i_{p-1}}) \cdot$$

$$\left(\sum_{q=1}^n c_{ji_p}^q \varphi_R(\text{ix}_q) \right) \quad \text{mit } c_{ji_p}^q \in \mathbb{R}, 1 \leq q \leq n.$$

Nun gilt:

$$\widetilde{\text{ad}}_R(\text{ix}_j) (\varphi_R(x_{i_1}) \dots \varphi_R(x_{i_{p-1}}) \cdot \varphi_R(x_{i_p})) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} b_{i_1, \dots, i_{p-1}, \nu_1, \dots, \nu_n}^j$$

(2)

$$\varphi_R(x_{i_1})^{\nu_1} \dots \varphi_R(x_n)^{\nu_n} \cdot \varphi_R(x_{i_p}) + \varphi_R(x_{i_1}) \dots \varphi_R(x_{i_{p-1}}) \cdot$$

$$\left(\sum_{q=1}^n c_{ji_p}^q \varphi_R(x_q) \right).$$

Es ist $[\varphi_R(x_j), \varphi_R(x_{j'})] = \sum_{q=1}^n c_{jj'}^q \varphi_R(x_q)$, $j, j' \in \{1, \dots, n\}$, $c_{jj'}^q \in \mathbb{R}$,

und $[\varphi_R(x_j), \varphi_R(\text{ix}_j)] = \sum_{q=1}^n c_{jj}^q \varphi_R(\text{ix}_q)$. Damit folgt die Behauptung,

indem man (1) und (2) nach der Birkhoff-Witt-Basis von $U(L^{\mathbb{R}})$ (vgl. (A.6e)) entwickelt, die der Ordnung $x_1 < \text{ix}_1 < x_2 < \dots < x_n < \text{ix}_n$ der Basiselemente von $L^{\mathbb{R}}$ entspricht.

(2.14) Satz: Seien L , $\{x_1, \dots, x_n\}$ und φ_R wie in (2.13), $\mathcal{J}: L \rightarrow U(L)$ die kanonische

Einbettung von L und $U(L)$ und $\{z_1, \dots, z_l\}$, $l \in \mathbb{N}$, eine algebraisch unab-

hängige Untermenge von $Z^+(L)$ mit $z_r := \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} a_{i_1, \dots, i_m}^r \varphi(x_{i_1})$

..... $\varphi(x_{i_m})$, $a_{i_1, \dots, i_m}^r \in \mathbb{R}$, $x_{i_k} \in \{x_1, \dots, x_n\}$, $1 \leq k \leq m$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq l$.

Dann ist $z_r^{\mathcal{R}} := \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} a_{i_1 \dots i_m}^r \varphi_R(x_{i_1}) \dots \varphi_R(x_{i_m})$ ein Element von $Z^+(L^{\mathcal{R}})$ und $\{z_1^{\mathcal{R}}, \dots, z_l^{\mathcal{R}}\}$ eine algebraisch unabhängige Menge.

Bew.: $z_r^{\mathcal{R}}$ ist genau dann ein Element von $Z^+(L^{\mathcal{R}})$, wenn $\widetilde{\text{ad}_R(x_j)}(z_r^{\mathcal{R}}) = 0$ und $\widetilde{\text{ad}_R(x_j)}(z_r^{\mathcal{R}}) = 0$ gilt, $1 \leq j \leq n$. Da die Elemente von $\{\varphi_R(x_j) | 1 \leq j \leq n\}$ unter sich dieselben Vertauschungsrelationen erfüllen wie die Elemente von $\{\varphi(x_j) | 1 \leq j \leq n\}$, ist es offensichtlich, daß gilt: $\widetilde{\text{ad}_R(x_j)}(z_r^{\mathcal{R}}) = 0$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq r \leq l$. Nun zeigen wir, daß gilt: $\widetilde{\text{ad}_R(x_j)}(z_r^{\mathcal{R}}) = 0$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq r \leq l$. Da die Strukturkonstanten von L bezüglich $\{x_1, \dots, x_n\}$ reell sind, gibt es wegen (A.6e) eine fast überall verschwindende $\mathcal{R}$ -wertige Folge $\{b_{j, i_1 \dots i_m, \nu_1 \dots \nu_n} | (\nu_1, \dots, \nu_n) \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n\}$ derart, daß gilt:

$$\widetilde{\text{ad}_R(x_j)}(\varphi_R(x_{i_1}) \dots \varphi_R(x_{i_m})) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} b_{j, i_1 \dots i_m, \nu_1 \dots \nu_n} \varphi_R(x_{i_1})^{\nu_1} \dots \varphi_R(x_{i_m})^{\nu_m}.$$

Damit gilt: $0 = \widetilde{\text{ad}_R(x_j)}(z_r^{\mathcal{R}}) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} \dots$

$(\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} a_{i_1 \dots i_m}^r b_{j, i_1 \dots i_m, \nu_1 \dots \nu_n} \varphi_R(x_{i_1})^{\nu_1} \dots \varphi_R(x_{i_m})^{\nu_m})$. Somit gilt wegen (A.6e): $\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} a_{i_1 \dots i_m}^r b_{j, i_1 \dots i_m, \nu_1 \dots \nu_n} = 0$. Daraus folgt mit (2.13):

$\widetilde{\text{ad}_R(x_j)}(z_r^{\mathcal{R}}) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} (\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_m \leq n, m \in \mathbb{N}} a_{i_1 \dots i_m}^r b_{j, i_1 \dots i_m, \nu_1 \dots \nu_n}) \varphi_R(x_{i_1})^{\nu_1} \dots \varphi_R(x_{i_m})^{\nu_m} = 0$. Somit ist $z_r^{\mathcal{R}} \in Z^+(L^{\mathcal{R}})$, $1 \leq r \leq l$.

Sei nun $p \in \mathcal{R}[t_1, \dots, t_l]$ mit $p(z_1^{\mathcal{R}}, \dots, z_l^{\mathcal{R}}) = 0$. Dann gilt mit ψ aus (2.12): $0 = \psi(p(z_1^{\mathcal{R}}, \dots, z_l^{\mathcal{R}})) = p(\psi(z_1^{\mathcal{R}}), \dots, \psi(z_l^{\mathcal{R}})) = p(z_1, \dots, z_l)$. Damit folgt wegen der algebraischen Unabhängigkeit von $\{z_1, \dots, z_l\}$, daß $p = 0$ ist. Deshalb ist $\{z_1^{\mathcal{R}}, \dots, z_l^{\mathcal{R}}\}$ eine algebraisch unabhängige Menge. ■

Es ist $\text{grad}(z_i^{\mathcal{R}}) = \text{grad}(z_i)$, $1 \leq i \leq l$ (vgl. (B15)ff).

Beim Vergleich von (2.14) mit (2.10) fällt auf, daß man zwar mit (2.14) leicht algebraisch unabhängige Untermengen von $Z^+(L^{\mathcal{R}})$ angeben kann, wenn man solche von $Z^+(L)$ kennt, aber nur mit dem mühsamen Verfahren von (2.10) die Erzeugenden-

§ 3 Eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine Untermenge des Zentrums der universellen einhüllenden Algebra einer endlichdimensionalen komplexen halbeinfachen Lie-Algebra algebraisch unabhängig ist und dieses Zentrum erzeugt

In diesem Paragraphen beweisen wir einen Satz (vgl. (3.2)), mit dessen Hilfe wir in § 4 die fundamentalen Aussagen beweisen. Er gibt eine leicht nachprüf-bare hinreichende Bedingung für eine gewisse Untermenge Σ des Zentrums $Z(L)$ der universellen einhüllenden Algebra $U(L)$ einer endlichdimensionalen komplexen halbeinfachen Lie-Algebra L an, algebraisch unabhängig zu sein und mit $1_{U(L)}$ ganz $Z(L)$ zu erzeugen. Σ ist dadurch charakterisiert, daß jedes Element z von Σ als eine Summe von zwei Elementen h_z und b_z von $U(L)$ geschrieben werden kann, wobei h_z und b_z leicht nachprüf-bare Eigenschaften besitzen. Insbesondere ist $h_z \in \mathcal{H}$ (vgl. (3.1)). Damit kann man die Elemente der Menge $\{(R \circ \sigma \circ \lambda^{-1})(h_z) \mid z \in \Sigma\}$ (vgl. (1.3), (C.6), (1.1)), die in (3.2) vorkommt, wegen der Kommutativität von $\mathcal{H}$ leicht berechnen. $S_{\text{Int}}(H^*)$ (vgl. (C.7)) ist die Invariantenalgebra einer endlich erzeugten und endlichen Gruppe (vgl. (A.14a c)) und ist deshalb i.a. leichter zu überblicken als $Z(L)$. Obwohl $S_{\text{Int}}(H^*)$ algebraisomorph ist zu $Z(L)$ (vgl. (1.3), (C.6), (C.8), (1.16)), ist es i.a. nicht möglich von einer algebraisch unabhängigen Untermenge Σ' von $S_{\text{Int}}(H^*)$ ausgehend, die mit $1_{S(H^*)}$ ganz $S_{\text{Int}}(H^*)$ erzeugt, eine entsprechende Untermenge von $Z(L)$ zu gewinnen, da die Abbildung R (vgl. (1.3)) die wir zum Beweis der Isomorphie von $S_{\text{Int}}(H^*)$ zu $Z(L)$ benutzt haben, durch Einschränkung der Elemente von $P(L)$ erklärt ist und deshalb es i.a. nicht möglich ist zu einem Element von $S_{\text{Int}}(H^*)$ dessen Urbild unter R in $P_{\text{Int}}(L)$ explizit anzugeben. Eine wesentliche Voraussetzung in (3.2), die ein Teil der erwähnten hinreichenden Bedingung ist, ist die Eigenschaft von $\{(R \circ \sigma \circ \lambda^{-1})(h_z) \mid z \in \Sigma\}$, algebraisch unabhängig zu sein und mit $1_{S(H^*)}$ ganz $S_{\text{Int}}(H^*)$ zu erzeugen. Deshalb ist (3.2) ein nützliches Hilfsmittel dazu, um u.U. eine Untermenge von $Z(L)$ zu finden, die algebraisch unabhängig ist und mit $1_{U(L)}$ ganz $Z(L)$ erzeugt.

Im folgenden ist L eine endlichdimensionale komplexe halbeinfache Lie-Algebra H eine Cartan-Unteralgebra von L (vgl. (A.3)), $U(L)$ die universelle einhüllende Algebra von L (vgl. (A.5)) und $Z(L)$ das Zentrum von $U(L)$. Da keine Verwechslung möglich ist, identifizieren wir in diesem Paragraphen die Elemente von L mit ihren φ -Bildern bzw τ -Bildern in $U(L)$ bzw. in $S(L)$ (vgl. (B.12)), wobei φ bzw. τ die kanonische Einbettung von L in $U(L)$ bzw. in $S(L)$ ist (vgl. (A.6a), (B.13b)).

(3.1) Def.: Sei $\{h_1, \dots, h_l\}$ eine Basis von H . Dann ist $\mathcal{H}$ die Unteralgebra von $U(L)$, die von h_i , $1 \leq i \leq l$, und $1_{U(L)}$ erzeugt wird.

$\mathcal{H}$ ist eine kommutative Algebra (vgl. (A.2d))

(3.2) Satz: Seien $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in W^*} L_\alpha$ eine Zerlegung von L wie in (A.8b), $B := \{h_i, b_\alpha \mid h_i \in H, 1 \leq i \leq l, b_\alpha \in L_\alpha, \alpha \in W^*\}$ eine Basis von L (vgl. (A.10h)), R wie in (1.3), d wie in (C.6), λ wie in (1.1), $\{z_1, \dots, z_l\}$ eine Untermenge von $Z^+(L)$ (vgl. (1.6)) derart, daß $\text{grad}(z_1) \leq \text{grad}(z_2) \leq \dots \leq \text{grad}(z_l)$ (vgl. (B.15b)),
 $z_i = h_{z_i} + b_{z_i}$, $1 \leq i \leq l$, mit $h_{z_i} \in \mathcal{H}$ (vgl. (3.1)), $\text{grad}(h_{z_i}) = \text{grad}(z_i)$ und b_{z_i} eine Summe von solchen Monomen u in den Elementen von B ist, daß $\text{grad}(u) \leq \text{grad}(z_i)$ und für $\text{grad}(u) = \text{grad}(z_i)$ in u mindestens ein Faktor ein Element von $\{b_\alpha \mid \alpha \in W^*\}$ ist, und $\{(R \circ d \circ \lambda^{-1})(h_{z_i}) \mid 1 \leq i \leq l\}$ eine Untermenge von homogenen Elementen von $S(H^*)$, deren Vereinigung mit $1_{S(H^*)}$ eine Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(H^*)$ ist (vgl. (C.7), (C.8)).
 Dann ist $\{z_1, \dots, z_l\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$.

Bew.: Wir setzen $\{x_1, \dots, x_n\} := B$; dabei ist n die Dimension von L . Analog zu dem Beweis von (1.7) gilt: $\lambda^{-1}(x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}) = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p} + s$, $p \in \mathbb{N}$, $\text{grad}(s) < p$, $x_{i_1}, \dots, x_{i_p} \in B$. Daraus folgt: $\lambda^{-1}(b_{z_i}) = p_i(x_1, \dots, x_n) + p_{i0}(h_1, \dots, h_l)$, wobei $p_i \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$, $p_{i0} \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_l]$, in jedem Monom von p_i kommt mindestens ein Faktor vor, der ein Element von $\{b_\alpha \mid \alpha \in W^*\}$ ist, und $\text{grad}(p_{i0}) < \text{grad}(z_i)$ ist.

Sei nun K die Killing-Form von L . Dann gilt wegen (A.8a) und (A.10g):
 $K(b_\alpha, h) = 0, \alpha \in W^*$, $h \in H$. Daraus folgt, daß $(R \circ d)(p_i(x_1, \dots, x_n)) = R(p_i(K(x_1, \dots, x_n), \dots, K(x_n, \dots))) = 0$ ist, $1 \leq i \leq l$. Damit gilt:
 $(R \circ d \circ \lambda^{-1})(z_i) = (R \circ d \circ \lambda^{-1})(h_{z_i}) + (R \circ d \circ \lambda^{-1})(b_{z_i}) = (R \circ d \circ \lambda^{-1})(h_{z_i}) + (R \circ d)(p_{i0}(h_1, \dots, h_l))$ mit $\text{grad}((R \circ d)(p_{i0}(h_1, \dots, h_l))) < \text{grad}(z_i)$. Nun ist nach (1.2), (C.6) und (1.3) $(R \circ d \circ \lambda^{-1})(z_i) \in \hat{P}_{\text{Int}}(H) = S_{\text{Int}}(H^*)$ (vgl. (C.8)) und nach Voraussetzung $(R \circ d \circ \lambda^{-1})(h_{z_i}) \in S_{\text{Int}}(H^*)$. Somit gilt: $(R \circ d)(p_{i0}(h_1, \dots, h_l)) \in S_{\text{Int}}(H^*)$ und $\text{grad}((R \circ d)(p_{i0}(h_1, \dots, h_l))) < \text{grad}(z_i)$. Daraus folgt wegen der erzeugenden Eigenschaft der Menge $\{(R \circ d \circ \lambda^{-1})(h_{z_i}) \mid 1 \leq i \leq l\}$ und der Homogenität ihrer Elemente, daß $(R \circ d)(p_{i0}(h_1, \dots, h_l)) = 0$ ist, denn es

zu erzeugen, dessen Grad kleiner ist als das Minimum der Grade der Polynome dieser Menge. Damit gilt wegen der vorhergehenden Aussage das folgende Gleichungssystem:

$$(R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(z_1) = (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_1})$$

$$\begin{aligned} (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(z_2) &= (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_2}) + (R \circ d)(p_{20}(h_1, \dots, h_1)) = \\ &= (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_2}) + q_2((R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_1})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(z_3) &= (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_3}) + (R \circ d)(p_{30}(h_1, \dots, h_1)) = \\ &= (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_3}) + q_3((R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_1}), (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_2})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(z_l) &= (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_l}) + (R \circ d)(p_{l0}(h_1, \dots, h_1)) = \\ &= (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_l}) + q_l((R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_1}), \dots, (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_{l-1}})), \end{aligned}$$

wobei $q_j \in \mathcal{C}[t_1, \dots, t_{j-1}]$ und $\text{grad}(q_j((R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_1}), \dots, (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_{j-1}}))) < \text{grad}(z_j)$ ist, $2 \leq j \leq l$.

Daraus folgt durch iteratives Einsetzen, daß zu jedem q_j ein $\hat{q}_j \in \mathcal{C}[t_1, \dots, t_{j-1}]$ existiert, $2 \leq j \leq l$, mit $q_j((R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_1}), \dots, (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_{j-1}})) = \hat{q}_j((R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(z_1), \dots, (R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(z_{j-1}))$. Damit ist die Vereinigung von $\{(R \circ d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(z_i) \mid 1 \leq i \leq l\}$ mit $1_{S(H^*)}$ eine Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(H^*)$. Daraus folgt mit (1.3)ff, (1.16) und (1.15b) die Behauptung. ■

Seien $\{h_1, \dots, h_l\}$ eine Basis von H und $\{h_1^*, \dots, h_l^*\}$ die dazu duale Basis. Dann gilt wegen (C.6)ff: $d(h_i) = \sum_{j=1}^l K(h_i, h_j) h_j^*$. Damit kann man wegen der Kommutativität von $\mathcal{H}$ leicht für $x \in \mathcal{H}$ das Element $(d \circ \tilde{\lambda}^{-1})(x)$ berechnen.

Sei $z_i = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^i x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}$, $1 \leq i \leq l$, $a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^i \in \mathcal{C}$, derart, daß $s_i := \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}} a_{\nu_1, \dots, \nu_n}^i x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n}$ (vgl. die Konventionen am Anfang von Anhang B) ein Element von $S_{\text{Int}}(L)$ ist. Dann folgt analog zu dem Beweis von (3.2), daß $\{s_1, \dots, s_l\}$ algebraisch unabhängig und $\{1_{S(L)}, s_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ eine Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(L)$ ist. Damit kann man leicht Erzeugendenmengen für die Invariantenalgebren der adjungierten Gruppen aller in § 4 untersuchten Lie-Algebren berechnen.

§ 4 Algebraisch unabhängige Erzeugendenmengen der Zentren der universellen einhüllenden Algebren komplexer bzw. reeller einfacher Lie-Algebren aus den Isomorphieklassen A_1, B_1, C_1, D_1 und G_2 bzw. aus den Isomorphieklassen der dazugehörigen reellen Formen

Nach (1.18) kann man das Zentrum der universellen einhüllenden Algebra einer endlichen direkten Summe von Lie-Algebren aus den Zentren der universellen einhüllenden Algebren der Summenglieder gewinnen. Daher genügt es bei einer systematischen Untersuchung zur Bestimmung der Casimir-Elemente (wie wir in diesem Paragraphen in Anlehnung an die physikalische Literatur die Elemente des Zentrums der universellen einhüllenden Algebra einer Lie-Algebra nennen) einer halbeinfachen Lie-Algebra, die Casimir-Elemente der einfachen Lie-Algebren aufzufinden. Nun sind die einfachen Lie-Algebren nach der Relation der Isomorphie in Äquivalenzklassen eingeteilt. Es gibt abzählbar unendlich viele Isomorphieklassen von komplexen oder reellen einfachen Lie-Algebren. Dabei gewinnt man die letzteren aus den ersteren, da jede reelle einfache Lie-Algebra entweder die Reellifizierung oder die reelle Form einer komplexen einfachen Lie-Algebra ist. Zu jeder komplexen einfachen Lie-Algebra gibt es endlich viele zueinander nicht-isomorphe reelle Formen, von denen genau eine kompakt ist. Man findet in der Literatur Repräsentanten aus jeder Isomorphieklassse der komplexen und der reellen einfachen Lie-Algebren. Wir haben in (2.6) bzw. (2.10) und (2.11) ein Verfahren angegeben, mit dem man aus einer Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra eine Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente von jeder ihrer reellen Formen bzw. von ihrer Reellifizierung gewinnen kann. Deshalb genügt es, nur die Casimir-Elemente der komplexen einfachen Lie-Algebren aufzusuchen. Es gibt kein uns bekanntes Verfahren zum Berechnen aller Casimir-Elemente einer Lie-Algebra. Für halbeinfache Lie-Algebren haben wir in (1.20) eine Methode zur Gewinnung einiger Casimir-Elemente angegeben. Wegen der Isomorphie der Invarianten der Weyl-Gruppe zu der Menge der Casimir-Elemente einer halbeinfachen Lie-Algebra (vgl. (1.3)ff und (1.16)) und der Graderhaltung dieses Isomorphismus kennen wir die Grade der Elemente einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente der komplexen einfachen Lie-Algebren. Denn in der mathematischen Literatur sind die Grade g_i , $1 \leq i \leq l$, der Elemente einer minimalen Menge von homogenen Elementen, die mit dem Einselement die Invarianten der Weyl-Gruppe einer komplexen einfachen Lie-Algebra erzeugt (vgl. (1.5)), berechnet; dabei ist l der Rang der Lie-Algebra. Die Zahlen g_i sind nach [47; pp 508-509, 515 - 516, 518, 520] die folgenden:

$$A_1 : 2, 3, \dots, 1 + 1;$$

$$B_1 : 2, 4, \dots, 2 \cdot 1;$$

$$C_1 : 2, 4, \dots, 2 \cdot 1;$$

$$D_1 \text{ (1 gerade)} : 2, 4, \dots, 1, 1, \dots, 2 \cdot 1 - 4, 2 \cdot 1 - 2 \text{ (1 hat die Vielfachheit 2)};$$

$$D_1 \text{ (1 ungerade)} : 2, 4, \dots, 1 - 1, 1, 1 + 1, \dots, 2 \cdot 1 - 4, 2 \cdot 1 - 2 \text{ (außer 1 kommen also nur gerade Zahlen vor)};$$

$$E_6 : 2, 5, 6, 8, 9, 12;$$

$$E_7 : 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18;$$

$$E_8 : 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30;$$

$$F_4 : 2, 6, 8, 12;$$

$$G_2 : 2, 6.$$

Nach [47; p.518] ist $\prod_{i=1}^l g_i = n$, wobei n die Ordnung der Weyl-Gruppe ist, und

es gilt für die jeweilige Lie-Algebra L : $\dim(L) = 2 \sum_{i=1}^l g_i - 1$. Wegen (2.6)ff und

(2.10)ff kann man sofort aus den Zahlen g_i die Grade einer minimalen Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente der reellen einfachen Lie-Algebren angeben: Für eine reelle Form einer komplexen einfachen Lie-Algebra L sind sie gleich den Zahlen g_i von L und für die Reellifizierung von L verdoppeln sich die Vielfachheiten der g_i von L .

Wir untersuchen in diesem Paragraphen die Casimir-Elemente sowohl komplexer als auch reeller Lie-Algebren zu den klassischen Reihen $A_1, 1 \geq 1, B_1, 1 \geq 2, C_1, 1 \geq 3, D_1, 1 \geq 4$, und der Ausnahmealgebra G_2 . Für Repräsentanten sowohl aus A_1, B_1, C_1, D_1 und G_2 als auch aus jeder Isomorphieklasse von den dazugehörigen reellen Formen geben wir algebraisch unabhängige Mengen an, die mit dem Element die Menge ihrer Casimir-Elemente erzeugen^{*)}. Zur Gewinnung der Casimir-Elemente der Reellifizierungen der obigen komplexen Lie-Algebren verweisen wir auf das allgemeine Verfahren, das wir in (2.10) dargelegt haben. In (2.10)ff haben wir nach diesem Verfahren eine Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente von $(\mathcal{L}(2, \mathbb{C}))^{\mathbb{R}}$ aus einer Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente von $\mathcal{L}(2, \mathbb{C})$ berechnet. Es sei bemerkt, daß die Grade (vgl. (B.15)ff) der Elemente der von uns angegebenen Erzeugendenmengen der Casimir-Elemente der Repräsentanten zu einer

^{*)} Nach der Fertigstellung der Arbeit wurde uns die Arbeit [76] bekannt, in der algebraisch unabhängige Erzeugendenmengen der Casimir-Elemente von komplexen Repräsentanten aus A_1, B_1, D_1 und D_1 angegeben werden. Die Beweismethode für die Erzeugendeneigenschaft und algebraische Unabhängigkeit dieser Mengen ist ähnlich zu unserem Verfahren, jedoch ungenau.

festen Isomorphieklasse, als Folge unserer Sätze in § 2, alle gleich den oben zu der komplexen Klasse angegebenen Zahlen sind. Alle Repräsentanten aus den obigen Isomorphieklassen, die wir anführen, sind Lie-Unteralgebren der Matrixalgebra $M_n(\mathbb{K})$, die isomorph ist zu der Lie-Algebra der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{K}) := \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \det(M) \neq 0\}$. Insbesondere seien die von uns angegebenen Repräsentanten aus den Isomorphieklassen der reellen Formen zu G_2 hervorgehoben, die im Gegensatz zu den in der Literatur angegebenen Repräsentanten eine einfache Struktur haben. Um die Hauptaussagen zu beweisen, war es notwendig algebraisch unabhängige Mengen von Invarianten der Weyl-Gruppen der zu untersuchenden Algebren zu berechnen, die mit dem Einselement diese Invariantenalgebren erzeugen. Dies ist nach [54; pp 111 - 113] prinzipiell für jede endliche Gruppe möglich. Wir haben in den Teilen 4.1 bis 4.5 die Weyl-Gruppen und Erzeugendenmengen ihrer Invarianten der klassischen Lie-Algebren und von G_2 berechnet. (vgl. (A.13)ff). Als Nebenprodukt dieser Arbeit fanden wir auch für jede Lie-Algebra, die wir hier untersuchen, algebraisch unabhängige Mengen, die mit dem Einselement der symmetrischen Algebra die Invariantenalgebra der zu der jeweiligen Lie-Algebra adjungierten Gruppe (vgl. (C.1)) erzeugen. Wir haben ferner über die oben erwähnten zueinander nicht-isomorphen Lie-Algebren hinaus auch diejenigen halbeinfachen Lie-Algebren zum Gegenstand unserer Untersuchung gemacht, die durch Extrapolation der obigen Folgen der einfachen Lie-Algebren bis zu $l = 1$ gewonnen werden (vgl. [55; pp 351 - 353]). Obwohl eine weitgehende Analogie zwischen unseren Repräsentanten aus B_1 und D_1 vorhanden ist, hielten wir es für angebracht, unsere Untersuchung dieser beiden Folgen in getrennten Teilen abzuhandeln. Denn einerseits sind ihre Weyl-Gruppen und deren Invarianten doch von verschiedener Struktur und andererseits haben im Falle von D_1 sowohl das Casimir-Element $\hat{z}_1^q$ (vgl. (4.4.6)) als auch die reelle Form $\sqrt{v}^*(21)$ (vgl. (4.4.4)) kein Analogon in der Behandlung von B_1 .

In dem ganzen Paragraphen 4 ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ferner identifizieren wir die Elemente einer Lie-Algebra L mit ihren $\mathcal{J}$ -Bildern bzw. $\mathcal{T}$ -Bildern in $U(L)$ bzw. in $S(L)$ (vgl. (A.6a), B.13b)).

4.1. Die Casimir-Elemente der Isomorphieklasse A_1 und der Isomorphieklassen der reellen Formen von A_1 .

In diesem Abschnitt dieses Paragraphen geben wir für den Repräsentanten $\mathcal{J}^2(1 + 1, \mathbb{C})$ von A_1 mehrere voneinander verschiedene algebraisch unabhängige Mengen an, die mit ${}^1_{U(\mathcal{J}^2(1 + 1, \mathbb{C}))}$ die Casimir-Elemente von $\mathcal{J}^2(1 + 1, \mathbb{C})$

erzeugen. Ferner berechnen wir für je einen Repräsentanten der Isomorphieklassen der reellen Formen von $\mathfrak{sl}(1+1, \mathbb{C})$ zu den genannten Mengen analoge Erzeugendensmengen.

In ganz 4.1. ist 1, wenn nicht anders vermerkt, ein beliebiges Element von $\mathbb{N}$. Nun definieren wir diejenigen Lie-Algebren, die wir als Repräsentanten der Isomorphieklassen zum unmittelbaren Gegenstand unserer Untersuchung machen.

$$(4.1.1) \text{ Def.: Seien } E_{p+q}^q := \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}, p, q \in \mathbb{N}, \text{ und } J_{2n} := \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Dann setzen wir: $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) := \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{spur}(M) = 0\}, n \in \mathbb{N};$

$$\mathfrak{su}(p, q) := \{M \in M_{p+q}(\mathbb{C}) \mid \text{spur}(M) = 0, M^+ \cdot E_{p+q}^q = -E_{p+q}^q \cdot M\}, p, q \in \mathbb{N};$$

$$\mathfrak{su}(n) := \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid \text{spur}(M) = 0, M^+ = -M\}, n \in \mathbb{N};$$

$$\mathfrak{sl}^*(2n) := \{M \in M_{2n}(\mathbb{C}) \mid \text{spur}(M) = 0, M^+ \cdot J_{2n} = J_{2n} \cdot M\}, n \in \mathbb{N}.$$

$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ ist eine Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ und isomorph zu der Lie-Algebra der speziellen linearen Gruppe $SL(n, \mathbb{K}) := \{M \in GL(n, \mathbb{K}) \mid \det(M) = 1\}$. $\mathfrak{su}(p, q)$ bzw.

$\mathfrak{su}(n)$ bzw. $\mathfrak{sl}^*(2n)$ ist eine reelle Lie-Algebra und isomorph zu der Lie-Algebra der Lie-Gruppe $SU(p, q) := \{M \in SL(p+q, \mathbb{C}) \mid M^+ \cdot E_{p+q}^q \cdot M = E_{p+q}^q\}$ bzw. der speziellen

unitären Gruppe $SU(n) := \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \mid M^+ \cdot M = E_n, \det(M) = 1\}$ bzw. der Lie-Gruppe $SL^*(2n) := \{M \in SL(2n, \mathbb{C}) \mid M^+ \cdot J_{2n} \cdot M^{-1} = J_{2n}\}.$

Nun folgt ein Satz, den man mit Hilfe von Aussagen in [48; pp 136 - 137, 226] leicht beweisen kann.

(4.1.2) Satz: Seien $l \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$ wie in (4.1.1), $e_{ij} \in M_{l+1}(\mathbb{C})$ mit

$$(e_{ij})_{km} := \delta_{ik} \delta_{jm}, 1 \leq i, j, k, m \leq l+1, h_k := e_{kk} - e_{l+1, l+1}, 1 \leq k \leq l+1,$$

und $B_{\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})} := \{h_k, e_{ij} \mid 1 \leq k \leq l+1, 1 \leq i, j \leq l+1, i \neq j\}$. Dann ist

$\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}) \in A_1$, die $(l+2)$ -elementige Menge $B_{\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})}$ eine Basis von $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$, die lineare Hülle H von $\{h_k \mid 1 \leq k \leq l+1\}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$, $\{\omega_i - \omega_j, \omega_{l+1} - \omega_i, \omega_i - \omega_{l+1} \mid 1 \leq i, j \leq l+1\}$ die Menge der Wurzeln von H in $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$, wobei $\{\omega_i \mid 1 \leq i \leq l+1\}$ die zu $\{h_k \mid 1 \leq k \leq l+1\}$ duale Basis von H^* und $\omega_{l+1} := -\sum_{i=1}^l \omega_i$ ist, der zu $\omega_i - \omega_j, i \neq$

bzw. $w_{1+1} = w_i$ bzw. $w_i = w_{1+1}$ gehörige Wurzelraum von H in $\mathcal{O}^L(1+1, \mathbb{C})$
 $\{c e_{ij} \mid c \in \mathbb{C}\}$ bzw. $\{c e_{1+1, i} \mid c \in \mathbb{C}\}$ bzw. $\{c e_{i, 1+1} \mid c \in \mathbb{C}\}$ und die Weyl-
 Gruppe von $\mathcal{O}^L(1+1, \mathbb{C})$ bezüglich H die symmetrische Gruppe von $\{w_i \mid$
 $1 \leq i \leq 1+1\}$.

Wir geben nun eine Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(H^*)$ (vgl. (C.7)) an, um anschließend (3.2) anzuwenden.

(4.1.3) Satz: Die Untermenge $\{\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_{1+1}\}$ der symmetrischen Grundfunktionen (vgl. (B.9a)) in den Elementen von $\{w_1, w_2, \dots, w_{1+1}\}$ (vgl. (4.1.2)) ist algebraisch unabhängig und erzeugt mit $1_{S(H^*)}$ ganz $S_{\text{Int}}(H^*)$; dabei ist H wie in (4.1.2).

Bew. Nach (4.1.2) ist $\text{Int}(W^*, H)$ (vgl. (A.13)) die symmetrische Gruppe von $\{w_i \mid 1 \leq i \leq 1+1\}$. Damit sind die Elemente von $S_{\text{Int}}(H^*)$ symmetrische Funktionen in den Elementen von $\{w_i \mid 1 \leq i \leq 1+1\}$. Somit und nach (B.10b) ist die Menge $\{\varphi_i(w_1, \dots, w_{1+1}) \mid 1 \leq i \leq 1+1\}$ eine Menge, die mit $1_{S(H^*)}$ ganz $S_{\text{Int}}(H^*)$ erzeugt. Es ist $\varphi_1(w_1, w_2, \dots, w_{1+1}) = 0$. Damit und wegen $\text{card}(\{\varphi_2, \dots, \varphi_{1+1}\}) = 1$ folgt nach (1.3)ff und (1.5)ff die Behauptung. ■

Wir führen im folgenden Satz eine Basis von $\mathcal{O}^L(1+1, K)$ ein, die es erlaubt, die Casimir-Elemente von $\mathcal{O}^L(1+1, K)$ besonders einfach darzustellen.

(4.1.4) Satz: Seien $x_{ij} := e_{ij}$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 1+1$, und $x_{kk} := h_k - \frac{1}{1+1}$
 $\sum_{j=1}^{1+1} h_j$, $1 \leq k \leq 1+1$ (vgl. (4.1.2)). Dann ist die $1(1+2)$ -elementige Menge
 $\{x_{ij}, x_{kk} \mid 1 \leq i, j \leq 1+1, i \neq j, 1 \leq k \leq 1+1\}$ eine Basis von $\mathcal{O}^L(1+1, K)$
 und es gilt: $[x_{ij}, x_{km}] = \delta_{jk} x_{im} - \delta_{im} x_{kj}$, $1 \leq i, j, k, m \leq 1+1$.

Bew.: Der erste Teil der Aussage ist trivial. Die Vertauschungsrelationen folgen wegen $e_{ij} \cdot e_{km} = \delta_{jk} e_{im}$ durch Rechnung. ■

Nun führen wir diejenigen Casimir-Elemente ein, die wir zum Beweis der Hauptaussagen (4.1.6) und (4.1.9) dieses Abschnittes der Arbeit benutzen.

(4.1.5) Satz: Seien x_{ij} , $1 \leq i, j \leq l+1$, wie in (4.1.4), $(z_1)_{ij} = x_{ij}$,

$$(z_{n+1})_{ij} := \sum_{k=1}^{l+1} x_{ik} \cdot (z_n)_{kj}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad z_n := \sum_{i=1}^{l+1} (z_n)_{ii}.$$

Dann ist $z_n \in Z^+(\mathcal{A}^l(l+1, \mathbb{K}))$.

Bew.: Wir zeigen, daß gilt: $\widetilde{\text{ad}(x_{ij})}((z_n)_{km}) = d_{jk}(z_n)_{im} - d_{im}(z_n)_{kj}$ (vgl. (A.6)ff), $n \in \mathbb{N}$. Nach (4.1.4) ist dies für $n = 1$ richtig. Für $n > 1$ beweisen wir es durch Induktion nach $(n+1)$: $\widetilde{\text{ad}(x_{ij})}((z_{n+1})_{km}) = \widetilde{\text{ad}(x_{ij})}(\sum_{r=1}^{l+1} x_{kr} \cdot (z_n)_{rm}) =$
 $= \sum_{r=1}^{l+1} ([x_{ij}, x_{kr}] \cdot (z_n)_{rm} + x_{kr} \cdot \widetilde{\text{ad}(x_{ij})}((z_n)_{rm})) = \sum_{r=1}^{l+1} ((d_{jk} x_{ir} - d_{ir} x_{kj}) \cdot$
 $(z_n)_{rm} + x_{kr} \cdot (d_{rj}(z_n)_{im} - d_{im}(z_n)_{rj})) = d_{jk}(z_{n+1})_{im} - d_{im}(z_{n+1})_{kj}.$

Damit gilt für $n \geq 2$: $\widetilde{\text{ad}(x_{ij})}(z_n) = \widetilde{\text{ad}(x_{ij})}(\sum_{k,m=1}^{l+1} x_{km} \cdot (z_{n-1})_{mk}) =$
 $= \sum_{k,m=1}^{l+1} ((d_{jk} x_{im} - d_{im} x_{kj}) \cdot (z_{n-1})_{mk} + x_{km} \cdot (d_{jm}(z_{n-1})_{ik} - d_{ik}(z_{n-1})_{mj})) =$
 $= (z_n)_{ij} - \sum_{k=1}^{l+1} x_{kj} \cdot (z_{n-1})_{ik} + \sum_{k=1}^{l+1} x_{kj} \cdot (z_{n-1})_{ik} - (z_n)_{ij} = 0.$

Somit ist die Behauptung bewiesen. ■

Analog zu dem Beweis von (4.1.5) zeigt man leicht, daß z_n aufgefaßt als Element von $S(\mathcal{A}^l(l+1, \mathbb{K}))$ ein Element von $S_{\text{Int}}(\mathcal{A}^l(l+1, \mathbb{K}))$ ist. Damit und mit (1.2) ist auch das symmetrisierte z_n ein Element von $Z^+(\mathcal{A}^l(l+1, \mathbb{K}))$ (vgl. (1.1)ff).

Nun folgt eine Hauptaussage dieses Teiles 4.1. Im folgenden Satz geben wir sowohl für unseren Repräsentanten aus A_1 als auch für eine reelle Form davon (vgl. (4.1.7)) eine algebraisch unabhängige Menge an, die mit dem Einselement der universellen einhüllenden Algebra die Menge der Casimir-Elemente erzeugt.

(4.1.6) Satz: Sei z_n , $n \in \mathbb{N}$, wie in (4.1.5). Dann ist $\{z_j \mid 2 \leq j \leq l+1\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathcal{A}^l(l+1, \mathbb{K}))$.

Bew.: Zunächst beweisen wir (4.1.6) für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei $h_{z_n} := \sum_{i=1}^{l+1} (x_{ii})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $\tilde{\lambda}^{-1}(h_{z_n}) = \sum_{i=1}^{l+1} (x_{ii})^n = : p(h_1, \dots, h_l)$ mit $p \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_l]$ (vgl.

(1.1) und (4.1.4)). Nun berechnen wir $\mathcal{O}(p(h_1, \dots, h_l))$ (vgl. (C.6)). Mit (A.10f)

folgt: $K(h_i, h_j) = 2(l+1)(1 + \sigma_{ij}^f)$, $1 \leq i, j \leq l$. Daraus folgt leicht durch Rechnung,

daß $\mathcal{O}(h_i) = 2(l+1) \sum_{k=1}^l (1 + \sigma_{ik}^f) w_k = 2(l+1) (w_i - w_{l+1})$ ist. Damit gilt:

$$(\mathcal{O} \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_n}) = \mathcal{O}(p(h_1, \dots, h_l)) = \sum_{i=1}^l (2(l+1)(w_i - w_{l+1}) - \frac{1}{l+1})$$

$$\sum_{j=1}^l 2(l+1)(w_j - w_{l+1})^n + (-\frac{1}{l+1})^n \left(\sum_{j=1}^l 2(l+1)(w_j - w_{l+1})^n \right) = (2(l+1))^n \sum_{i=1}^{l+1} w_i^n.$$

Die Potenzsummen $\sum_{i=1}^{l+1} (w_i)^n$ sind nach (B.10C) durch die symmetrischen Grundfunk-

tionen algebraisch darstellbar und umgekehrt. Somit und wegen (1.3)ff, (1.5),

(4.1.3) und $R(w_i) = w_i$, $1 \leq i \leq l+1$, ist $\{(R \circ \mathcal{O} \circ \tilde{\lambda}^{-1})(h_{z_n}) \mid 2 \leq n \leq l+1\}$ eine

algebraisch unabhängige Menge, die mit $1_{S(H^*)}$ ganz $S_{\text{Int}}(H^*)$ erzeugt. Damit er-

füllen $\{z_2, \dots, z_{l+1}\}$, h_{z_n} und $b_{z_n} := z_n - h_{z_n}$, $2 \leq n \leq l+1$, alle Bedingungen

von (3.2). Somit ist $\{z_2, \dots, z_{l+1}\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge

von $Z^+(\mathcal{O}\mathcal{L}(l+1, \mathbb{C}))$. Daraus folgt mit (2.4) die Behauptung auch für $K = \mathbb{R}$. ■

Nun wenden wir uns den reellen Formen von $\mathcal{O}\mathcal{L}(l+1, \mathbb{C})$ zu. Wir entnehmen [52; p.119] folgende Aussage:

(4.1.7) Satz: Seien die Bezeichnungen wie in (4.1.1) und $l \in \mathbb{N}$. Dann ist jede der folgenden reellen Lie-Algebren genau ein Repräsentant aus jeder Isomorphieklasse der reellen Formen einer Lie-Algebra aus A_l :

$\mathcal{O}\mathcal{L}(l+1)$, $\mathcal{O}\mathcal{L}(l+1-q, q)$, $1 \leq q \leq \frac{l+1}{2}$, $\mathcal{O}\mathcal{L}(l+1, \mathbb{R})$ für $l \geq 2$, $\mathcal{O}\mathcal{L}^*(l+1)$ für $l \geq 3$ und l ungerade. Dabei ist $\mathcal{O}\mathcal{L}^*(l+1)$ kompakt.

Nach (4.1.1) ist es offensichtlich, daß die Lie-Algebren, die in (4.1.7) vorkommen, reelle Formen von $\mathcal{O}\mathcal{L}(l+1, \mathbb{C})$ sind. Die folgende Definition dient dazu, in (4.1.9) für jede Lie-Algebra L wie in (4.1.7) eine Basis und in einfacher Weise eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(L)$ anzugeben.

(4.1.8) Def.: Seien $p, q \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ derart, daß $p + q = l+1$ ist, $x_{ij}, 1 \leq i, j \leq l+1$, wie in (4.1.4) und $g^q := (g_{ij}^q)_{1 \leq i, j \leq l+1} := E_{l+1}^q$ (vgl. (4.1.1)), wo-

bei $E_{l+1}^0 := E_{l+1}$ und $E_{l+1}^{l+1} := -E_{l+1}$. Dann definieren wir:

a) $N_{jk}^q := g_{jj}^q x_{kj} - g_{kk}^q x_{jk}, M_{jk}^q := i(g_{jj}^q x_{kj} + g_{kk}^q x_{jk}), 1 \leq j, k \leq l+1$.

b) $S_{jk} := i(x_{jk} - x_{j+\frac{l+1}{2}, k+\frac{l+1}{2}}), S_{j+\frac{l+1}{2}, k+\frac{l+1}{2}} := x_{jk} + x_{j+\frac{l+1}{2}, k+\frac{l+1}{2}},$

$S_{j, k+\frac{l+1}{2}} := x_{j, k+\frac{l+1}{2}} - x_{j+\frac{l+1}{2}, k}, S_{j+\frac{l+1}{2}, k} := i(x_{j, k+\frac{l+1}{2}} + x_{j+\frac{l+1}{2}, k}),$

$1 \leq k, j \leq \frac{l+1}{2}, l \text{ ungerade.}$

Es ist $N_{jk}^q = -N_{kj}^q, M_{jk}^q = M_{kj}^q$ und $x_{jk} = -\frac{1}{2} g_{kk}^q (N_{jk}^q + i M_{jk}^q), 1 \leq j, k \leq l+1$.

Ferner ist $x_{jk} = \frac{1}{2} (S_{j+\frac{l+1}{2}, k+\frac{l+1}{2}} - i S_{jk})$ und $x_{j+\frac{l+1}{2}, k+\frac{l+1}{2}} = \frac{1}{2} (S_{j+\frac{l+1}{2}, k+\frac{l+1}{2}} + i S_{jk}), 1 \leq j, k \leq \frac{l+1}{2}$.

Nun folgt eine weitere Hauptaussage von 4.1. In (4.1.6) wurde für $Z^+(\mathcal{A}^l(1+1, \mathbb{R}))$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge angegeben. Nun geben wir entsprechende Erzeugendenmengen für die Casimir-Elemente der anderen in (4.1.7) angeführten reellen Formen von $\mathcal{A}^l(1+1, \mathbb{C})$ an.

(4.1.9) Satz: Seien $z_n, n \in \mathbb{N}$, wie in (4.1.5) und $\mathcal{A}^{\tilde{u}}(1+1, 0) := \mathcal{A}^{\tilde{u}}(1+1)$.

Dann gilt:

a) Die $l(l+2)$ -elementige Menge $B_{\mathcal{A}^{\tilde{u}}(1+1-q, q)} := \{ N_{jk}^q, M_{jk}^q, M_{rr}^q \mid$

$1 \leq j < k \leq l+1, 1 \leq r \leq l \}$, $0 \leq q \leq l$, ist eine Basis von $\mathcal{A}^{\tilde{u}}(1+1-q, q)$ und

$\{ \text{Re } B_{\mathcal{A}^{\tilde{u}}(1+1-q, q)}(i^n z_n) \mid 2 \leq n \leq l+1 \}$ (vgl. (2.7)) ist eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathcal{A}^{\tilde{u}}(1+1-q, q))$.

b) Die $l(l+2)$ -elementige Menge $B_{\mathcal{A}^l(1+1)} := \{ S_{jk} \mid 1 \leq j, k \leq l+1,$

$(j, k) \neq (l+1, l+1) \}$ ist eine Basis von $\mathcal{A}^l(1+1)$, l ungerade, und

$\{ \text{Re } \mathcal{A}^l(1+1)(z_n) \mid 2 \leq n \leq l+1 \}$ ist eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathcal{A}^l(1+1))$.

Bew.: Die Aussage über die Basen ist offensichtlich. Da $\mathcal{L}^{*}(1+q, q)$ und $\mathcal{L}^{*}(1+1)$ reelle Formen von $\mathcal{L}(1+1, \mathbb{C})$ sind, genügt es nach (2.4) zu zeigen, daß

$\{ \operatorname{Re} \mathcal{L}^{*}(1+q, q) (i^n z_n) \mid 2 \leq n \leq l+1 \}$ bzw. $\{ \operatorname{Re} \mathcal{L}^{*}(1+1) (z_n) \mid 2 \leq n \leq l+1 \}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^{+}(\mathcal{L}(1+1, \mathbb{C}))$ ist.

a) Es ist $i^n z_n = (\frac{1}{2})^n \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq l+1} g_{i_1 i_1}^2 g_{i_2 i_2}^2 \dots g_{i_n i_n}^2 (M_{i_1 i_2}^2 - i N_{i_1 i_2}^2) \dots (M_{i_{n-1} i_n}^2 - i N_{i_{n-1} i_n}^2)$. Sei $h_{i^n z_n} := (\frac{1}{2})^n \sum_{i=1}^{l+1} (g_{ii}^2)^n (M_{ii}^2)^n$. Dann folgt

leicht durch Rechnung: $h_{i^n z_n} = i^n h_{z_n}$, wobei h_{z_n} wie in dem Beweis von (4.1.6) ist. Daraus folgt mit (4.1.8a) analog zu dem Beweis von (4.1.6), daß $h_{i^n z_n}$ und $h_{z_n} = \operatorname{Re} \mathcal{L}^{*}(\ell+1, q)(i^n z_n) - h_{i^n z_n}$ alle Bedingungen von (3.2) erfüllen. Damit ist die Behauptung bewiesen.

b) Für h_{z_n} wie in dem Beweis von (4.1.6) werden wir zeigen, daß gilt:

$\operatorname{Re} \mathcal{L}^{*}(\ell+1) (h_{z_n}) = h_{z_n}$. Es ist $h_{z_n} = \sum_{j=1}^{l+1} (x_{jj})^n = (\frac{1}{2})^n \sum_{j=1}^{\frac{l+1}{2}} ((S_{j+\frac{\ell+1}{2}, j+\frac{\ell+1}{2}} + i S_{jj})^n + (S_{j+\frac{\ell+1}{2}, j+\frac{\ell+1}{2}} + i S_{jj})^n)$. Daraus folgt wegen der Vertauschbarkeit der Elemente von $\{ S_{jj} \mid 1 \leq j \leq l+1 \}$, daß $\operatorname{Im} \mathcal{L}^{*}(\ell+1)(h_{z_n}) = 0$ ist. Damit ist $\operatorname{Re} \mathcal{L}^{*}(\ell+1)(h_{z_n}) = h_{z_n}$. Damit und mit (4.1.8b) erfüllen $\operatorname{Re} \mathcal{L}^{*}(\ell+1)(h_{z_n})$ und $h_{z_n} = \operatorname{Re} \mathcal{L}^{*}(\ell+1)(z_n) - h_{z_n}$ alle Bedingungen von (3.2). Somit ist die Aussage b) bewiesen. ■

Nach (2.4) ist es offensichtlich, daß die in (4.1.9) angegebenen Erzeugendenmengen von $Z^{+}(\mathcal{L}^{*}(1+q, q))$ und $Z^{+}(\mathcal{L}^{*}(1+1))$ auch Erzeugendenmengen von $Z^{+}(\mathcal{L}^{*}(1+1, \mathbb{C}))$ sind. Mit (1.5)ff, (3.2)ff und den Ausführungen über die Casimir-Elemente in § 2 analogen Betrachtungen über die Invariantenalgebra der adjungierten Gruppe einer halbeinfachen Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ kann man leicht zeigen, daß die Elemente jeder in 4.1 angegebenen Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente einer in diesem Teil untersuchten Lie-Algebra L , aufgefaßt als Elemente der symmetrischen Algebra $S(L)$, ebenso eine Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(L)$ mit analogen Eigenschaften in bezug auf die algebraische Unabhängigkeit bilden. Damit bilden die symmetrisierten Elemente (vgl. (1.1))ff) jeder hier angegebenen Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente wieder eine Erzeugendenmenge mit denselben angeführten Eigenschaften der ursprünglichen Menge.

4.2 Die Casimir-Elemente der Isomorphieklasse B_1 und der Isomorphieklassen der reellen Formen von B_1

Wir werden im folgenden für einige Repräsentanten der Isomorphieklasse B_1 und je einen Repräsentanten der Isomorphieklassen der reellen Formen einer Lie-Algebra aus B_1 jeweils eine algebraisch unabhängige Menge angeben, die mit dem Einselement der universellen einhüllenden Algebra die Menge der Casimir-Elemente erzeugt.

In ganz 4.2 ist 1, wenn nicht anders vermerkt, ein Element von $\mathbb{N}$. Im folgenden Satz, dessen Inhalt eine Zusammenfassung von Aussagen in [48; pp 138 - 139] ist, führen wir einen Repräsentanten aus B_1 ein. Mit Hilfe der Eigenschaften dieses Repräsentanten beweisen wir die Hauptaussage dieses Abschnittes (vgl. (4.2.7))

$$(4.2.1) \text{ Satz: Seien } \hat{S}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 \\ 0 & E_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_1 := \{M \in M_{2l+1}(\mathbb{C}) \mid M \cdot \hat{S}_1 = -\hat{S}_1 \cdot M^t\},$$

$$e_{ij} \in M_{2l+1}(\mathbb{C}) \text{ mit } (e_{ij})_{km} := \delta_{ik} \delta_{jm}, \quad 1 \leq i, j, k, m \leq 2l+1,$$

$$h_i := e_{i+1, i+1} - e_{i+1+1, i+1+1}, \quad e_{w_i} := e_{i+1, 1} - e_{1, i+1+1}, \quad e_{-w_i} :=$$

$$e_{1, i+1} - e_{i+1+1, 1}, \quad e_{w_i - w_j} := e_{i+1, j+1} - e_{j+1+1, i+1+1}, \quad e_{-w_i - w_j} :=$$

$$e_{i+1+1, j+1} - e_{j+1+1, i+1}, \quad e_{w_i + w_j} := e_{j+1, i+1+1} - e_{i+1, j+1+1}, \quad 1 \leq i, j \leq l$$

$$\text{und } B := \{h_i, e_{w_i}, e_{-w_i}, e_{w_i - w_j}, e_{-w_i - w_j}, e_{w_i + w_j} \mid i \neq j, k < m,$$

$$1 \leq i, j, k, m \leq l\}. \text{ Dann ist } \hat{B}_1 \in B_1 \text{ für } l \geq 2, \text{ die } l(2l+1)\text{-elementige Menge}$$

B eine Basis von $\hat{B}_1$, die lineare Hülle H von $\{h_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ eine Cartan-

Unteralgebra von $\hat{B}_1$, die Linearform $w_i : H \rightarrow \mathbb{C}, 1 \leq i \leq l$, die jeder Matrix

von H ihren Koeffizienten an der $(i+1, i+1)$ -ten Stelle zuordnet, eine

Wurzel von H in $\hat{B}_1$, $\{w_i, -w_i, w_i - w_j, -w_k - w_m, w_k + w_m \mid i \neq j,$

$k < m, 1 \leq i, j, k, m \leq l\}$ die Menge der von Null verschiedenen Wurzeln von H

in $\hat{B}_1$ und die mit diesen Wurzeln indizierten Elemente von B sind Vektoren

der zu denselben Wurzeln gehörigen Wurzelräume von H in $\hat{B}_1$.

Offensichtlich gilt: $w_i(h_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq l$. Damit ist $\{w_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ die zu $\{h_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ duale Basis in H^* .

Wir entnehmen [48; p.228] die folgende Aussage über die Wirkung der Weyl-Gruppe $\text{Int}(W^*, H)$ von $\hat{B}_1$ bezüglich H auf H^* :

(4.2.2) Satz: $\text{Int}(W^*, H)$ enthält genau alle Produkte von jeder linearen Abbildung, die eine Permutation von $\{w_1, \dots, w_l\}$ bewirkt, mit jeder linearen Abbildung, die eine Untermenge von $\{w_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ auf die Menge der negativen Elemente derselben Menge abbildet und deren Komplementärmenge in $\{w_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ invariant läßt.

Mit (4.2.2) sind wir imstande, den folgenden Satz über die Algebra $S_{\text{Int}}(H^*)$ der Invarianten der Weyl-Gruppe $\text{Int}(W^*, H)$ in der Algebra der Polynomfunktionen $P(H) = S(H^*)$ von H zu formulieren:

(4.2.3) Satz: Die Menge $\{s_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ der Potenzsummen in $w_1^2, \dots, w_l^2$ (vgl. (B9b)) ist eine algebraisch unabhängige Menge, die mit $1_{S(H^*)}$ ganz $S_{\text{Int}}(H^*)$ erzeugt.

Bew.: Nach (4.2.1)ff ist $\{w_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ eine Basis von H^* . Deshalb hat jedes Element von $S(H^*)$ eine Polynomdarstellung in $w_1, \dots, w_l$. Sei $f(w_1, \dots, w_l) \in S_{\text{Int}}(H^*)$.

Dann hat $f(w_1, \dots, w_l)$ eine Darstellung von der folgenden Gestalt: $f(w_1, \dots, w_l) =$

$$\sum_{\nu_1, \dots, \nu_l} a_{\nu_1, \dots, \nu_l} w_1^{\nu_1} \dots w_l^{\nu_l} \text{ mit } a_{\nu_1, \dots, \nu_l} \in \mathbb{C} \text{ und } \nu_1, \dots, \nu_l \in \{0\} \cup \mathbb{N} \text{ und es gilt wegen}$$

(4.2.2): $f(-w_1, w_2, \dots, w_l) = f(w_1, w_2, \dots, w_l)$. Daraus folgt, daß ν_1 eine gerade

Zahl ist. Analog kann man folgern, daß $\nu_2, \dots, \nu_l$ gerade Zahlen sind. Daher existiert

ein $g \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_l]$ mit $f(w_1, \dots, w_l) = g(w_1^2, \dots, w_l^2)$. Nach (4.2.2) bewirkt

$\text{Int}(W^*, H)$ alle Permutationen von $(w_1^2, \dots, w_l^2)$. Somit besteht $S_{\text{Int}}(H^*)$ aus den

symmetrischen Polynomen in $w_1^2, \dots, w_l^2$. Eine Erzeugendenmenge der symmetrischen

Polynome ist aber nach (B.10b c) die Vereinigung der Menge der Potenzsummen

$\{s_i \mid 1 \leq i \leq l\}$, die nach (B.9)ff algebraisch unabhängig ist, mit dem Einselement

der Polynomalgebra. Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Nun führen wir diejenigen Repräsentanten der Isomophieklassen zu B_1 ein, für die wir die Hauptaussagen von diesem Teil der Arbeit formulieren und beweisen.

(4.2.4) Def.: Seien $g^q := \begin{pmatrix} E_{2l+1-q} & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}, q \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq q \leq l, \text{ und } g^0 := E_{2l+1}.$

Dann definieren wir: $\nu(2l+1-q, q; \mathbb{K}) := \{N \in M_{2l+1}(\mathbb{K}) \mid N^t \cdot g^q = -g^q \cdot N\},$

$0 \leq q \leq l.$

Für $q \in \{1, 2, \dots, l\}$ ist $\mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{K})$ isomorph zu der Lie-Algebra der pseudoorthogonalen Gruppe $O(2l+1-q, q; \mathbb{K}) := \{M \in GL(2l+1, \mathbb{K}) \mid M^t \cdot g^q \cdot M = g^q\}$.
 $\mathcal{V}(2l+1, 0; \mathbb{K})$ ist isomorph zu der Lie-Algebra der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(2l+1, \mathbb{K}) := \{M \in SL(2l+1, \mathbb{K}) \mid M^t \cdot M = E_{2l+1}\}$. Offensichtlich ist $\mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{R})$ eine reelle Form von $\mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{C})$, $0 \leq q \leq l$.

(4.2.5) Satz: (vgl. [52; pp 83, 119]). Seien die Bezeichnungen wie in (4.2.4),

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ij}^q \in \mathcal{M}_{2l+1}(\mathbb{K}) \text{ mit } (N_{ij}^q)_{km} &:= g_{im}^q \delta_{jk} - g_{jm}^q \delta_{ik}, \quad (g_{ij}^q)_{1 \leq i, j \leq 2l+1} \\ &:= g^q, \quad 0 \leq q \leq l, \quad 1 \leq i, j, k, m \leq 2l+1, \text{ und } B^q := \{N_{ij}^q \mid 1 \leq i < j \leq 2l+1\}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

a) $\mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{C}) \in B_1$, $l \geq 2$.

b) Jede der reellen Lie-Algebren $\mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{R})$, $l \geq 2$, ist genau ein Repräsentant aus jeder Isomorphieklasse der reellen Formen einer Lie-Algebra aus B_1 . $\mathcal{V}(2l+1, 0; \mathbb{R})$ ist kompakt.

c) Die $l(2l+1)$ -elementige Menge B^q ist eine Basis von $\mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{K})$.

$$d) [N_{ij}^q, N_{km}^q] = g_{ik}^q N_{jm}^q + g_{jm}^q N_{ik}^q - g_{im}^q N_{jk}^q - g_{jk}^q N_{im}^q.$$

Sei $e_{ij} \in \mathcal{M}_{2l+1}(\mathbb{K})$ mit $(e_{ij})_{km} = \delta_{ik}^q \delta_{jm}^q$. Dann ist $N_{ij}^q = g_{ii}^q e_{ji} - g_{jj}^q e_{ij}$.

Damit und mit $e_{ij} \cdot e_{km} = \delta_{jk}^q e_{im}$ berechnet man leicht die Vertauschungsrelationen in (4.2.5d). Offensichtlich ist $N_{ij}^q = -N_{ji}^q$. Im folgenden Satz führen wir gewisse Casimir-Elemente von $\mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{K})$ ein, die eine besonders einfache Darstellung in den Elementen von B^q haben. Eine Auswahl von diesen Casimir-

Elementen erzeugt mit $1_{U(\mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{K}))}$ die gesamte Menge der Casimir-Elemente (vgl. (4.2.7)).

(4.2.6) Satz: Seien $(z_1^q)_{ij} := N_{ij}^q$, $(z_{n+1}^q)_{ij} := \sum_{k=1}^{2l+1} g_{kk}^q (z_n^q)_{ik} \cdot N_{kj}^q$ und

$$z_n^q := \sum_{k=1}^{2l+1} g_{kk}^q (z_n^q)_{kk}, \quad 0 \leq q \leq l, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i, j \leq 2l+1. \text{ Dann ist}$$

$$z_n^q \in \mathbb{Z}^+(\mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{K})).$$

Bew.: Wir zeigen zunächst, daß gilt: $\widetilde{\text{ad}(N_{ij}^q)}((z_n^q)_{km}) = g_{ki}^q (z_n^q)_{jm} - g_{jm}^q (z_n^q)_{ki} - g_{kj}^q (z_n^q)_{im} + g_{im}^q (z_n^q)_{kj}$. Dies ist wegen $N_{ij}^q = -N_{ji}^q$ und (4.2.5d) für $n = 1$ richtig. Wir beweisen den Rest dieser Aussage durch Induktionsschluß von n auf

$$\begin{aligned}
n+1 : \widetilde{\text{ad}}(N_{ij}^q)((z_{n+1}^q)_{km}) &= \widetilde{\text{ad}}(N_{ij}^q) \left(\sum_{r=1}^{2l+1} g_{rr}^q (z_n^q)_{kr} \cdot N_{rm}^q \right) = \sum_{r=1}^{2l+1} g_{rr}^q \\
&\quad \left(\widetilde{\text{ad}}(N_{ij}^q)((z_n^q)_{kr}) \cdot N_{rm}^q + \sum_{r=1}^{2l+1} g_{rr}^q (z_n^q)_{kr} \cdot [N_{ij}^q, N_{rm}^q] \right) = \sum_{r=1}^{2l+1} g_{rr}^q (g_{ki}^q (z_n^q)_{jr} - \\
&\quad - g_{jr}^q (z_n^q)_{ki} - g_{kj}^q (z_n^q)_{ir} + g_{ir}^q (z_n^q)_{kj}) \cdot N_{rm}^q + \sum_{r=1}^{2l+1} g_{rr}^q (z_n^q)_{kr} \cdot (g_{ir}^q N_{jm}^q + g_{jm}^q N_{ir}^q - \\
&\quad - g_{im}^q N_{jr}^q - g_{jr}^q N_{im}^q) = g_{ki}^q (z_{n+1}^q)_{jm} - (z_n^q)_{ki} \cdot N_{jm}^q - g_{kj}^q (z_{n+1}^q)_{im} + (z_n^q)_{kj} \cdot N_{im}^q + \\
&\quad + (z_n^q)_{ki} \cdot N_{jm}^q - g_{jm}^q (z_{n+1}^q)_{ki} + g_{im}^q (z_{n+1}^q)_{kj} - (z_n^q)_{kj} \cdot N_{im}^q. \text{ Damit gilt die obige}
\end{aligned}$$

Gleichung. Daraus folgt: $\widetilde{\text{ad}}(N_{ij}^q)(z_n^q) = \sum_{k=1}^{2l+1} g_{kk}^q \widetilde{\text{ad}}(N_{ij}^q)((z_n^q)_{kk}) =$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{2l+1} g_{kk}^q (g_{ki}^q (z_n^q)_{jk} - g_{jk}^q (z_n^q)_{ki} - g_{kj}^q (z_n^q)_{ik} + g_{ik}^q (z_n^q)_{kj}) = (z_n^q)_{ji} - (z_n^q)_{ji} - \\
&- (z_n^q)_{ij} + (z_n^q)_{ij} = 0. \text{ Damit ist (4.2.6) bewiesen.}
\end{aligned}$$

Eine zu (4.1.5)ff analoge Aussage über z_n^q gilt auch hier.

Nun folgt die Hauptaussage von 4.2.

(4.2.7) Satz: Sei z_n^q , $0 \leq q \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, wie in (4.2.6). Dann ist $\{z_2^q, z_4^q, \dots, z_{2l}^q\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{K}))$.

Bew.: Wir beweisen die Behauptung zunächst für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Seien $\hat{B}_1$ wie in (4.2.1),

$$\hat{T}_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} E_1 & \frac{i}{\sqrt{2}} E_1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} E_1 & \frac{-i}{\sqrt{2}} E_1 \end{pmatrix} \quad \text{und } f : \mathcal{V}(2l+1, 0; \mathbb{C}) \rightarrow \hat{B}_1, f(N) := \hat{T}_1 \cdot N \cdot \hat{T}_1^{-1}.$$

Dann ist $\hat{T}_1^{-1} = \hat{T}_1^t \cdot \hat{S}_1$ und f ein Isomorphismus. Es gilt:

$$(\hat{T}_1 \cdot N_{ij}^0 \cdot \hat{T}_1^{-1})_{km} = -(\hat{T}_1)_{ki} (\hat{T}_1^{-1})_{jm} + (\hat{T}_1)_{kj} (\hat{T}_1^{-1})_{im}, \quad 1 \leq i, j, k, m \leq 2l+1.$$

Daraus folgt durch Rechnung, daß f von den Elementen der Basis B^0 (vgl. (4.2.5)) nur die Elemente $N_{k+1, k+1+1}^0$, $1 \leq k \leq l$, auf solche Matrizen in $\hat{B}_1$ abbildet, deren Diagonalelemente nicht alle Null sind. Es ist $f(N_{k+1, k+1+1}^0) = i h_k$ (vgl. (4.2.1)). Daraus folgt, daß f die Menge $B^0 \setminus \{N_{k+1, k+1+1}^0 \mid 1 \leq k \leq l\}$ auf eine Menge abbildet,

deren Elemente Linearkombinationen der Basiselemente $B \setminus \{h_k \mid 1 \leq k \leq l\}$ sind, da die Diagonalelemente dieser Basiselemente alle Null sind. Nun kann f nach (A.6c) eindeutig zu einem Isomorphismus von $U(\mathcal{V}(2l+1, 0; \mathbb{C}))$ auf $U(\hat{B}_1)$ fortgesetzt werden, den wir wieder mit f bezeichnen. Für $n \in \{2, 4, \dots, 2l\}$ gilt:

$$z_n^0 = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq 2l+1} N_{i_1, i_2}^0 \cdot N_{i_2, i_3}^0 \cdot \dots \cdot N_{i_{n-1}, i_n}^0 = \xi \sum_{k=1}^l (N_{k+1, k+1}^0)^n + \xi_n^0,$$

wobei $\xi \in \{2, -2\}$ und ξ_n^0 eine Summe von Monomen in den Elementen von B^0 ist derart, daß kein Monom in der Summe vom Grade n auftritt, das nur von $\{N_{k+1, k+1}^0 \mid$

$1 \leq k \leq l\}$ erzeugt wird. Damit gilt: $f(z_n^0) = \xi i^n \sum_{k=1}^l (h_k)^n + f(\xi_n^0)$, wobei $f(\xi_n^0)$ im

gleichen Sinne wie vorhin kein Monom vom Grade n als Summanden besitzt, das nur von $\{h_k \mid 1 \leq k \leq l\}$ erzeugt wird. Sei K die Killingform von $\hat{B}_1$. Dann folgt mit

$$(4.2.1) \text{ und (A.10f): } K\left(\frac{i}{\sqrt{2(2l+1)}} h_j, \frac{i}{\sqrt{2(2l+1)}} h_k\right) = -\delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq l. \text{ Daraus}$$

folgt wegen (4.2.1)ff für $h_{f(z_n^0)} = \xi i^n \sum_{k=1}^l (h_k)^n$, daß $(R \circ \sigma \circ \chi^{-1})(h_{f(z_n^0)})$

(vgl. (3.2)) bis auf eine von Null verschiedene multiplikative Konstante gleich

$\sum_{k=1}^l (w_k)^n$ ist, $n = 2, 4, \dots, 2l$. Diese Polynome sind homogen und ihre Vereini-

gung mit $S_{(H^*)}^*$ ist nach (4.2.3) eine Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}^*(H^*)$. Damit er-

füllt $\{f(z_2^0), f(z_4^0), \dots, f(z_{2l}^0)\}$ alle Voraussetzungen von (3.2). Deshalb ist

$\{f(z_2^0), f(z_4^0), \dots, f(z_{2l}^0)\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von

$Z^+(\hat{B}_1)$. Daraus folgt die Behauptung für $K = \mathbb{C}$ und $q = 0$, da f ein Isomorphismus

ist. Seien nun $q \in \{1, 2, \dots, l\}$ und $f^q : \mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{V}(2l+1, 0; \mathbb{C}), f^q(N) :=$

$$= (g^q)^{-\frac{1}{2}} \cdot N \cdot (g^q)^{\frac{1}{2}}. \text{ Dann ist } f^q \text{ ein Isomorphismus und es gilt: } f^q(N_{ij}^q) =$$

$$= (g_{ii}^q)^{-\frac{1}{2}} (g_{jj}^q)^{-\frac{1}{2}} N_{ij}^0, \quad 1 \leq i, j \leq 2l+1. \text{ Wie vorhin kann } f^q \text{ zu einem Isomorphismus}$$

von $U(\mathcal{V}(2l+1-q, q; \mathbb{C}))$ auf $U(\mathcal{V}(2l+1, 0; \mathbb{C}))$ fortgesetzt werden und wir bezeich-

nen diesen wieder mit f^q . Damit folgt leicht: $f^q(z_n^0) = z_n^0$. Hieraus folgt die

Behauptung für $K = \mathbb{C}$ vollständig, da f^q ein Isomorphismus und $\{z_2^0, z_4^0, \dots, z_{2l}^0\}$

eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathcal{V}(2l+1, 0; \mathbb{C}))$ ist. Für

$K = \mathbb{R}$ folgt die Behauptung sofort wegen (4.2.6) und (2.4). ■

Wir geben im folgenden noch eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\hat{B}_1)$ an (vgl. (4.2.1)). Seien $x_{i,-i} := h_i$, $x_{i,-j} := e_{w_j - w_i}$, $x_{i0} := e_{-w_i}$, $x_{0,-i} := e_{w_i}$, $x_{km} := e_{-w_m - w_k}$, $x_{-k,-m} := e_{w_k + w_m}$, $i \neq j$, $k < m$, $1 \leq i, j, k, m \leq l$, und $x_{ij} \equiv -x_{ji}$, $-1 \leq i, j \leq l$. Dann ist die $l(2l+1)$ -elementige Menge $\{x_{ij} \mid i > j, -1 \leq i, j \leq l\}$ eine Basis von $\hat{B}_1$ und es gilt: $[x_{ij}, x_{km}] = \delta_{j,-k} x_{im} - \delta_{-i,m} x_{kj} + \delta_{j,-m} x_{ki} - \delta_{i,-k} x_{jm}$. Analog zu den Beweisen von (4.2.6) und (4.2.7) kann man zeigen, daß $z_n := \sum_{-1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq l} x_{-i_1, i_2} \cdot x_{-i_2, i_3} \cdot \dots \cdot x_{-i_n, i_1}$, $n \in \mathbb{N}$, ein Element von $Z^+(\hat{B}_1)$ und $\{z_2, z_4, \dots, z_{2l}\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\hat{B}_1)$ ist.

Wegen (4.2.6)ff gelten auch hier zu ganz (4.1.9)ff analoge Aussagen über die Erzeugendenmengen der Invariantenalgebra der adjungierten Gruppe und der Casimir-Elemente jeder in 4.2 untersuchten Lie-Algebra.

4.3 Die Casimir-Elemente der Isomorphieklasse C_1 und der Isomorphieklassen der reellen Formen von C_1

In diesem Teil von § 4 geben wir für den Repräsentanten $\mathcal{G}(2l, \mathbb{C})$ aus C_1 mehrere voneinander verschiedene Erzeugendenmengen des Zentrums der universellen einhüllenden Algebra an. Zu jeder Isomorphieklasse der reellen Formen von $\mathcal{G}(2l, \mathbb{C})$ geben wir einen Repräsentanten an, dessen Casimir-Elemente von einer der erwähnten Erzeugendenmengen erzeugt wird.

In ganz 4.3 ist 1, wenn nicht anders vermerkt, ein beliebiges Element von ${}^{\mathbb{N}}$. Im folgenden definieren wir einige Algebren, die die Repräsentanten zu C_1 bis auf Isomorphie umfassen.

(4.3.1) Def.: Seien $q \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$, $g^q := \begin{pmatrix} E_{1-q} & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$, wobei $g^0 := E_1$ und

$g^1 := -E_1$ ist, und $J_{2l} := \begin{pmatrix} 0 & E_1 \\ -E_1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann setzen wir:

$$\mathcal{G}(2l, \mathbb{K}) := \{N \in M_{2l}(\mathbb{K}) \mid N^{\dagger} J_{2l} = -J_{2l} \cdot N\};$$

$$\mathcal{G}(2l-2q, 2q) := \{N \in M_{2l}(\mathbb{C}) \mid N^{\dagger} J_{2l} = -J_{2l} \cdot N, N^{\dagger} \begin{pmatrix} g^q & 0 \\ 0 & g^q \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} g^q & 0 \\ 0 & g^q \end{pmatrix} \cdot N\}.$$

Die Lie-Algebra $\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{K})$ bzw. $\mathfrak{o}_Y(2l, 0)$ bzw. $\mathfrak{o}_Y(2l-2q, 2q)$ für $q \in \{1, 2, \dots, l\}$ ist isomorph zu der Lie-Algebra der symplektischen Gruppe $Sp(2l, \mathbb{K})$: =
 $= \{M \in GL(2l, \mathbb{K}) \mid M^t \cdot J_{2l} \cdot M = J_{2l}\}$ bzw. der unitären symplektischen Gruppe
 $Sp(2l) := Sp(2l, \mathbb{C}) \cap U(2l)$ bzw. der pseudosymplektischen Gruppe $Sp(2l-2q, 2q) :=$
 $= \{M \in Sp(2l, \mathbb{C}) \mid M^t \cdot \begin{pmatrix} g^q & 0 \\ 0 & g^q \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} g^q & 0 \\ 0 & g^q \end{pmatrix}\}.$

Wir entnehmen [48; pp 139 - 140] folgende Aussage.

(4.3.2) Satz: Seien $\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{C})$ wie in (4.3.1), $e_{ij} \in M_{2l}(\mathbb{C})$ mit $(e_{ij})_{km} :=$
 $= \delta_{ik} \delta_{jm}$, $1 \leq i, j, k, m \leq 2l$, $h_i := e_{ii} - e_{i+1, i+1}$, $e_{w_j - w_i} := e_{ij} - e_{j+1, i+1}$,
 $e_{-w_i - w_j} := e_{i, j+1} + e_{j, i+1}$, $e_{w_i + w_j} := e_{i+1, j} + e_{j+1, i}$, $e_{-2w_i} := e_{i, i+1}$,
 $e_{2w_i} := e_{i+1, i}$, $1 \leq i, j \leq l$, und $B_{\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{C})} := \{h_i, e_{2w_i}, e_{-2w_i},$
 $e_{w_j - w_i}, e_{-w_k - w_m}, e_{w_k + w_m} \mid i \neq j, k < m, 1 \leq i, j, k, m \leq l\}$. Dann ist
 $\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{C}) \in C_1$ für $l \geq 3$, die $l(2l+1)$ -elementige Menge $B_{\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{C})}$ eine
Basis von $\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{C})$, die lineare Hülle H von $\{h_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ eine Cartan-
Unteralgebra von $\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{C})$, die Linearform $w_i: H \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq l$, die jeder
Matrix von H ihren Koeffizienten an der (i, i) -ten Stelle zuordnet, ein
Element der zu $\{h_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ dualen Basis in H^* , $\{w_i - w_{i+1}, 2w_l \mid$
 $1 \leq i \leq l-1\}$ eine Menge von einfachen Wurzeln von H in $\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{C})$,
 $\{2w_i, -2w_i, w_j - w_i, -w_k - w_m, w_k + w_m \mid i \neq j, k < m, 1 \leq i, j, k, m \leq l\}$ die
Menge der von Null verschiedenen Wurzeln von H in $\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{C})$ und die mit
diesen Wurzeln indizierten Elemente von $B_{\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{C})}$ sind Vektoren der zu
denselben Wurzeln gehörigen Wurzelräume von H in $\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{C})$.

Die für $l = 1$ undefinierten Elemente der Mengen in (4.3.2) müssen weggelassen
werden. Danach ist z.B. $B_{\mathfrak{o}_Y(2, \mathbb{C})} = \{h_1, e_{2w_1}, e_{-2w_1}\}$. Nun berechnen wir die
Wirkung der Weyl-Gruppe $\text{Int}(W^*, H)$ von $\mathfrak{o}_Y(2l, \mathbb{C})$ bezüglich H auf den algebra-
ischen Dualraum H^* von H .

(4.3.3) Satz: $\text{Int}(W^*, H)$ enthält genau alle Produkte von jeder linearen
Abbildung, die eine Permutation von $\{w_1, \dots, w_l\}$ bewirkt, mit jeder
linearen Abbildung, die eine Untermenge von $\{w_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ auf die Menge der

negativen Elemente derselben Menge abbildet und deren Komplementärmenge in $\{w_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ invariant läßt.

Bew.: Seien $\alpha_i := w_i - w_{i+1}$, $1 \leq i \leq l-1$, und $\alpha_l := 2w_l$. Dann wird wegen (A.14c) und (4.3.2) $\text{Int}(W^*, H)$ von $\{S_{\alpha_i} \mid 1 \leq i \leq l\}$ erzeugt. Deshalb berechnen wir die Wirkung von S_{α_i} auf w_j , $1 \leq i, j \leq l$. Mit (A.10f) berechnet man: $K(h_i, h_j) = 4(1+l) \delta_{ij}$. Ferner gilt (vgl. (A.10b)): $K(h_{w_i}, h_j) = w_i(h_j) = \delta_{ij}$. Daraus folgt: $h_{w_i} = \frac{1}{4(1+l)} h_i$. Damit und mit (A.10b) berechnen wir die Ausdrücke $S_{\alpha_i}(w_j) = w_j - \frac{2B(\alpha_i, w_j)}{B(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i$. Die Rechnung ergibt: $S_{\alpha_i}(w_j) = w_j$, $S_{\alpha_i}(w_i) = w_{i+1}$, $S_{\alpha_i}(w_{i+1}) = w_i$, $j \neq i, i+1$, $1 \leq i \leq l-1$, $S_{\alpha_l}(w_j) = w_j - 2\delta_{lj} w_l$, $1 \leq j \leq l$. Daraus folgt leicht die Behauptung. ■

Nach (4.2.2) und (4.3.2) besitzen die Lie-Algebren $\hat{B}_1$ und $\mathcal{Y}(2l, \mathbb{C})$ isomorphe Weyl-Gruppen. Deshalb gilt analog zu (4.2.3) für die Invariantenalgebra $S_{\text{Int}}(H^*)$ von $\text{Int}(W^*, H)$:

(4.3.4) Satz: Die Menge $\{s_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ der Potenzsummen in $w_1^2, \dots, w_l^2$ ist eine algebraisch unabhängige Menge (vgl. (B.9)ff), die mit $1_{S(H^*)}$ ganz $S_{\text{Int}}(H^*)$ erzeugt.

Nun führen wir im folgenden Satz eine Basis von $\mathcal{Y}(2l, \mathbb{K})$ ein, die es erlaubt, die Casimir-Elemente von $\mathcal{Y}(2l, \mathbb{K})$ besonders einfach darzustellen.

(4.3.5) Satz: Seien die Bezeichnungen wie in (4.3.2), $x_{i,-i} := h_i$, $x_{i,-j} := e_{w_j - w_i}$, $x_{ij} := -e_{-w_i - w_j}$, $x_{-i,-j} := e_{w_i + w_j}$, $x_{ii} := -2e_{-2w_i}$, $x_{-i,-i} := 2e_{2w_i}$, $1 \leq i, j \leq l$, und $x_{ij} = x_{ji}$ für $i, j \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm l\}$. Dann ist die $l(2l+1)$ -elementige Menge $\{x_{ij} \mid i \geq j, i, j \neq 0, -1 \leq i, j \leq l\}$ eine Basis von $\mathcal{Y}(2l, \mathbb{K})$ und es gilt: $[x_{ij}, x_{km}] = \xi_k \delta_{-j,k} x_{im} + \xi_m \delta_{-j,m} x_{ik} + \xi_k \delta_{-i,k} x_{jm} + \xi_m \delta_{-i,m} x_{jk}$, wobei $\xi_i = 1$ für $1 \leq i \leq l$ und $\xi_i = -1$ für $-1 \leq i \leq -l$ ist.

Bew.: Der erste Teil der Behauptung ist trivial. Die Vertauschungsrelationen folgen wegen $e_{ij} \cdot e_{km} = \delta_{jk} e_{im}$ durch Rechnung. ■

Im folgenden Satz führen wir diejenigen Casimir-Elemente ein, die wir zur Formulierung der Hauptaussagen (4.3.7) und (4.3.10) benutzen.

(4.3.6) Satz: Seien x_{ij} und ξ_i , $i, j \in \{+1, \dots, +1\}$, wie in (4.3.5),

$$(z_1)_{ij} := \xi_i x_{ij}, \quad (z_{n+1})_{ij} := \xi_i \sum_{-1 \leq k \leq 1} x_{i, -i_k} \cdot (z_n)_{i_k j}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{und } z_n := \sum_{-1 \leq i \leq 1} (z_n)_{i, -i}. \quad \text{Dann ist } z_n \in \mathbb{Z}^+(\mathcal{O}_Y(2l, \mathbb{K})).$$

Bew.: Wir zeigen, daß gilt: $\widetilde{\text{ad}(x_{ij})}((z_n)_{km}) = \xi_i \delta_{-j, k} (z_n)_{im} + \xi_m \delta_{-j, m} (z_n)_{ki} + \xi_j \delta_{-i, k} (z_n)_{jm} + \xi_m \delta_{-i, m} (z_n)_{kj}$, $n \in \mathbb{N}$. Mit (4.3.5) folgt dies für $n = 1$.

Für $n > 1$ beweisen wir es durch Induktion nach $(n+1)$: $\widetilde{\text{ad}(x_{ij})}((z_{n+1})_{km}) =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{-1 \leq i_1 \leq 1} (\xi_k [x_{ij}, x_{k, -i_1}] \cdot (z_n)_{i_1 m} + \xi_k x_{k, -i_1} \cdot \widetilde{\text{ad}(x_{ij})}((z_n)_{i_1 m})) = \\ &= \sum_{-1 \leq i_1 \leq 1} (\xi_k (\xi_k \delta_{-j, k} x_{i, -i_1} + \xi_{-i_1} \delta_{-j, -i_1} x_{ik} + \xi_k \delta_{-i, k} x_{j, -i_1} + \\ &+ \xi_{-i_1} \delta_{-i, -i_1} x_{jk}) \cdot (z_n)_{i_1 m} + \xi_k x_{k, -i_1} \cdot (\xi_i \delta_{-j, i_1} (z_n)_{im} + \xi_m \delta_{-j, m} (z_n)_{i_1 i} \\ &+ \xi_j \delta_{-i, i_1} (z_n)_{jm} + \xi_m \delta_{-i, m} (z_n)_{i_1 j})) = \xi_i \delta_{-j, k} (z_{n+1})_{im} + \xi_k \xi_{-j} x_{ik} \cdot \\ &(z_n)_{jm} + \xi_j \delta_{-i, k} (z_{n+1})_{jm} + \xi_k \xi_{-i} x_{jk} \cdot (z_n)_{im} + \xi_k \xi_i x_{kj} \cdot (z_n)_{im} + \\ &\xi_m \delta_{-j, m} (z_{n+1})_{ki} + \xi_k \xi_j x_{ki} (z_n)_{jm} + \xi_m \delta_{-i, m} (z_{n+1})_{kj}. \quad \text{Daraus folgt wegen} \end{aligned}$$

$x_{ki} = x_{ik}$ sofort die obige Gleichung für $n + 1$.

Somit gilt: $\widetilde{\text{ad}(x_{ij})}(z_n) = \widetilde{\text{ad}(x_{ij})}(\sum_{-1 \leq k \leq 1} (z_n)_{k, -k}) = \sum_{-1 \leq k \leq 1} (\xi_i \delta_{-j, k} (z_n)_{i, -k} + \xi_{-k} \delta_{-j, -k} (z_n)_{ki} + \xi_j \delta_{-i, k} (z_n)_{j, -k} + \xi_{-k} \delta_{-i, -k} (z_n)_{kj}) = \xi_i (z_n)_{ij} + \xi_{-j} (z_n)_{ji} + \xi_j (z_n)_{ji} + \xi_{-i} (z_n)_{ij} = 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Wenn wir z_n als ein Element von $S(\mathcal{O}_Y(2l, \mathbb{K}))$ auffassen, dann folgt analog zu dem obigen Beweis, daß z_n ein Element von $S_{\text{Int}}(\mathcal{O}_Y(2l, \mathbb{K}))$ ist. Deshalb ist wegen (1.2) auch das symmetrisierte z_n ein Element von $\mathbb{Z}^+(\mathcal{O}_Y(2l, \mathbb{K}))$.

Der folgende Satz umfaßt neben (4.3.10) eine Hauptaussage von 4.3. Er gibt eine algebraisch unabhängige Menge für unseren Repräsentanten aus C_1 und auch für eine reelle Form davon an (vgl. (4.3.8)), die mit dem Einselement der jeweiligen universellen einhüllenden Algebra die Menge der Casimir-Elemente erzeugt.

(4.3.7) Satz: Sei z_n , $n \in \mathbb{N}$, wie in (4.3.6). Dann ist $\{z_2, z_4, \dots, z_{2l}\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathfrak{g}_Y(2l, \mathbb{K}))$.

Bew.: Wir beweisen die Behauptung zunächst für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Es ist

$$z_n = \sum_{-1 \leq i_1, \dots, i_n \leq 1} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_n} x_{i_1, -i_1} x_{i_2, -i_2} \dots x_{i_n, -i_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sei $h_{z_n} := \sum_{-1 \leq i \leq 1} (\xi_i)^n (x_{i, -i})^n$. Dann ist für gerades n : $h_{z_n} = 2 \sum_{i=1}^l (x_{i, -i})^n$.

Wegen $K(x_{i, -i}, x_{j, -j}) = K(h_i, h_j) = 4(l+1) \delta_{ij}^0$, $1 \leq i, j \leq l$, (vgl. den Beweis von (4.3.3) und (4.3.5)) gilt (vgl. (3.2)): $(R \circ \delta \circ \lambda^{-1})(h_{z_n})$ ist bis auf eine von Null verschiedene multiplikative Konstante gleich $\sum_{i=1}^l w_i^n$, n gerade. Mit

(4.3.5), (4.3.4), (4.3.2) und (3.2) folgt (4.3.7) für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Daraus folgt mit (2.4) die Behauptung auch für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. ■

Nun geben wir aus jeder Isomorphieklasse der reellen Formen von $\mathfrak{g}_Y(2l, \mathbb{C})$ einen Repräsentanten an.

(4.3.8) Satz: (vgl. [52; p.119]) Seien die Bezeichnungen wie in (4.3.1) und $l \geq 3$. Dann ist jede der folgenden reellen Lie-Algebren genau ein Repräsentant aus jeder Isomorphieklasse der reellen Formen einer Lie-Algebra aus C_1 : $\mathfrak{g}_Y(2l, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g}_Y(2l-2q, 2q)$, $0 \leq q \leq \frac{l}{2}$. Dabei ist $\mathfrak{g}_Y(2l, 0)$ kompakt.

Alle Lie-Algebren in (4.3.8) sind reelle Formen von $\mathfrak{g}_Y(2l, \mathbb{C})$. Eine Erzeugendenmenge für die Casimir-Elemente von $\mathfrak{g}_Y(2l, \mathbb{R})$ bzw. $\mathfrak{g}_Y(2l-2q, 2q)$ ist (4.3.7) bzw. (4.3.10) zu entnehmen. Die folgende Definition dient dazu, eine geeignete Basis für $\mathfrak{g}_Y(2l-2q, 2q)$ anzugeben.

(4.3.9) Def.: Seien g^q , $0 \leq q \leq l$, wie in (4.3.1), $(g_{ij}^q)_{1 \leq i, j \leq l} := g^q, g_{-i, -i}^q := g_{ii}^q$, $1 \leq i \leq l$, und x_{ij} und ξ_i , $i, j \in \{\pm 1, \dots, \pm l\}$, wie in (4.3.5).

Dann definieren wir: $y_{ij}^q := \sqrt{\varepsilon_j} (g_{ii}^q x_{ij} + \varepsilon_i g_{jj}^q x_{-i,-j})$.

Es ist $y_{ji}^q = \frac{\sqrt{\varepsilon_j}}{2} (\varepsilon_i + \varepsilon_j) y_{ij}^q + \frac{\sqrt{-\varepsilon_j}}{2} g_{ii}^q g_{jj}^q (\varepsilon_i \varepsilon_j - 1) y_{-i,-j}^q$ und
 $x_{ij} = \frac{\varepsilon_j}{2} (\sqrt{\varepsilon_j} g_{ii}^q y_{ij}^q + \varepsilon_i \sqrt{-\varepsilon_j} g_{jj}^q y_{-i,-j}^q)$.

Der folgende Satz umfaßt die zweite Hauptaussage von 4.3. In (4.3.7) und (4.3.10) werden für gewisse Repräsentanten aus jeder Isomorphieklasse der reellen Formen einer Lie-Algebra aus C_1 je eine algebraisch unabhängige Menge angegeben, die zusammen mit einer von Null verschiedenen Konstante die Menge ihrer Casimir-Elemente erzeugt.

(4.3.10) Satz: Seien $B_{\mathcal{Y}(2l-2q, 2q)}^q := \{y_{ij}^q \mid -1 \leq i \leq j \leq 1, i, j \neq 0\}$,

$0 \leq q \leq 1$, und z_n , $n \in \mathbb{N}$, wie in (4.3.6). Dann ist die $l(2l+1)$ -elementige Menge $B_{\mathcal{Y}(2l-2q, 2q)}^q$ eine Basis von $\mathcal{Y}(2l-2q, 2q)$ und

$\{_{\text{Re}} B_{\mathcal{Y}(2l-2q, 2q)}^q(z_n) \mid n = 2, 4, \dots, 2l\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathcal{Y}(2l-2q, 2q))$.

Bew.: Die Aussage über die Basis ist leicht einsehbar. Wegen (4.3.8)ff und (2.4) genügt es zu zeigen, daß $\{_{\text{Re}} B_{\mathcal{Y}(2l-2q, 2q)}^q(z_n) \mid n = 2, 4, \dots, 2l\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathcal{Y}(2l, \mathbb{C}))$ ist. Sei h_{z_n} wie im Beweis von (4.3.7). Dann gilt: $h_{z_n} = \text{Re } B_{\mathcal{Y}(2l-2q, 2q)}^q(h_{z_n})$ für gerades n (für ungerades n ist $h_{z_n} = 0$). Daraus folgt wegen (4.3.9) analog zu dem Beweis von (4.3.7) die Behauptung. ■

Wegen (4.3.6)ff gelten hier zu (4.1.9)ff analoge Aussagen über die Erzeugendenmengen von $S_{\text{Int}}(L)$ und $Z(L)$, wobei L jede der Lie-Algebren bedeutet, die wir in diesem Teil untersucht haben.

4.4 Die Casimir-Elemente der Isomorphieklasse D_1 und der Isomorphieklassen der reellen Formen von D_1

In 4.4 geben wir für einige Repräsentanten aus der Isomorphieklasse D_1 und je einen Repräsentanten der Isomorphieklassen der reellen Formen einer Lie-Algebra aus D_1 jeweils eine algebraisch unabhängige Menge an, die mit dem Einselement der universellen einhüllenden Algebra die Menge der Casimir-Elemente erzeugt. Diese Repräsentanten sind isomorph zu den Lie-Algebren der speziellen orthogonalen und der pseudoorthogonalen Lie-Gruppen von der Dimension $l(2l-1)$ und der Lie-Gruppe $SO^*(2l)$ (vgl. (4.4.4)ff).

In ganz 4.4 ist l , wenn nicht anders vermerkt, ein Element von $\mathbb{N}$ ungleich 1. $l = 1$ schließen wir deshalb aus, weil $\mathcal{V}(2, 0; \mathbb{K})$, $\mathcal{V}(1, 1; \mathbb{K})$ und $\mathcal{V}^*(2)$ nicht halbeinfache Lie-Algebren sind (vgl. [52; p.121]) und wir im Beweis von (4.4.7) den Satz (3.2) benutzen, den wir für halbeinfache Lie-Algebren bewiesen haben. Im folgenden Satz, der eine Zusammenfassung von Aussagen in (48; pp 140 - 141) wiedergibt, führen wir einen Repräsentanten aus D_1 ein, mit dessen Hilfe wir die Hauptaussage dieses Teiles beweisen (vgl. (4.4.7)).

(4.4.1) Satz: Seien $S_1 := \begin{pmatrix} O & E_l \\ E_l & O \end{pmatrix}$, $\hat{D}_1 := \{M \in M_{2l}(\mathbb{C}) \mid M \cdot S_1 = -S_1 \cdot M^t\}$,

$e_{ij} \in M_{2l}(\mathbb{C})$ mit $(e_{ij})_{km} := \delta_{ik} \delta_{jm}$, $1 \leq i, j, k, m \leq 2l$, $h_i := e_{ii} - e_{i+l, i+l}$, $e_{w_i - w_j} := e_{ji} - e_{i+l, j+l}$, $e_{w_i + w_j} := e_{i+l, j} - e_{j+l, i}$, $e_{-w_i - w_j} := e_{j, i+l} - e_{i, j+l}$, $1 \leq i, j \leq l$, und $B := \{h_i, e_{w_i - w_j}, e_{w_k + w_m}, e_{-w_k - w_m} \mid i \neq j, k < m, 1 \leq i, j, k, m \leq l\}$. Dann ist $\hat{D}_1 \in D_1$ für $l \geq 4$, die $l(2l-1)$ -elementige Menge B eine Basis von $\hat{D}_1$, die lineare Hülle H von $\{h_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ eine Cartan-Unteralgebra von $\hat{D}_1$, die Linearform $w_i: H \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq l$, die jeder Matrix von H ihren Koeffizienten an der (i, i) -ten Stelle zuordnet, ein Element der zu $\{h_i \mid 1 \leq i \leq l\}$ dualen Basis in H^* , $\{w_i - w_{i+l}, w_{l-1} + w_l \mid 1 \leq i \leq l-1\}$ eine Menge von einfachen Wurzeln von H in $\hat{D}_1$, $\{w_i - w_j, w_k + w_m, -w_k - w_m \mid i \neq j, k < m, 1 \leq i, j, k, m \leq l\}$ die Menge der von Null verschiedenen Wurzeln von H in $\hat{D}_1$ und die mit diesen Wurzeln indizierten Elemente von B sind Vektoren der zu denselben Wurzeln gehörigen Wurzelräume von H in $\hat{D}_1$.

Nun berechnen wir die Wirkung der Weyl-Gruppe $\text{Int}(H^*, h)$ von $\hat{D}_1$ bezüglich H auf H^* .

(4.4.2) Satz: Seien $\alpha_i := w_i - w_{i+1}$, $1 \leq i \leq l-1$, $\alpha_l := w_{l-1} + w_l$ und S_α wie in (A.13). Dann gilt: $S_{\alpha_i}(w_j) = w_j$ für $j \neq i+1$, $S_{\alpha_i}(w_{i+1}) = w_i$, $S_{\alpha_l}(w_{l-1}) = -w_{l-1}$, $S_{\alpha_l}(w_l) = w_l$ für $i \neq l-1$, $S_{\alpha_l}(w_{l-1}) = -w_{l-1}$, $S_{\alpha_l}(w_l) = w_l$. Damit bewirkt $\text{Int}(H^*, h)$ alle Permutationen von $\{w_1, \dots, w_l\}$ und einen Vorzeichenwechsel von genau den Elementen jeder Untermenge davon, deren Mächtigkeit eine gerade Zahl ist.

Bew.: Mit (A.10f) berechnet man: $K(h_{i+1}, h_j) = 4(1-1)^{i+1} \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq l$. Ferner gilt (vgl. (A.10b)): $K(h_{i+1}, h_j) = w_i(h_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq l$. Daraus folgt: $h_{i+1} = \frac{1}{4(i-1)} h_i$. Damit kann man wegen $K(h_{i+1}, h_{j+1}) = S(w_i, w_j)$ vgl. A.10b) die Ausdrücke $S_{\alpha_i}(w_j) = w_j - \frac{2B(\alpha_i, w_j)}{B(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i$, $1 \leq i, j \leq l$, berechnen, woraus leicht wegen (A.14c) die Behauptung folgt. ■

Mit (4.4.2) berechnen wir eine Erzeugendengruppe der Invarianten $S_{\text{Int}(H^*)}$ der Weyl-Gruppe.

(4.4.3) Satz: Sei S_i , $1 \leq i \leq l-1$, eine Potenzsumme in l (unbestimmt wie in (B.9)). Dann ist die Menge $\{S_1, w_1^2, \dots, w_{l-1}^2, w_1 w_2 \dots w_l \mid 1 \leq i \leq l-1\}$ eine algebraisch unabhängige Menge, die mit $1_{S_{\text{Int}(H^*)}}$ ganz $S_{\text{Int}(H^*)}$ erzeugt.

Bew.: Sei $f \in S_{\text{Int}(H^*)}$. Dann hat f eine eindeutige Darstellung von der folgenden Gestalt:

$$(1) \quad f = \sum_{x_1, \dots, x_l \in \{0,1\}} a_{x_1, \dots, x_l} w_1^{x_1} \dots w_l^{x_l}, \quad a_{x_1, \dots, x_l} \in \mathbb{C}.$$

Angenommen ein Monom in (1) hat die folgende Gestalt: $w_1^{x_1} w_2^{x_2} w_1^{x_3} \dots w_{l-1}^{x_{l-1}} w_{l+1}^{x_{l+1}} \dots w_j^{x_j} \dots w_1^{x_l}$, wobei $i, j \in \{1, 2, \dots, l\}$, $w_i \neq 0$ und w_j ungerade ist. Nun wenden wir auf f die Transformation von $\text{Int}(H^*, h)$ an, die genau die Wirkung $w_i \mapsto -w_i$, $w_j \mapsto -w_j$ hat. Diese Transformation läßt jedes Potenzprodukt $w_1^{x_1} \dots w_l^{x_l}$ bis auf Vorzeichen invariant. Deshalb muß jedes Monom wie in (1) wegen der Invarianzeigenschaft und der eindeutigen Darstellung von f nach dieser Transformation in sich übergehen.

Daraus folgt, daß kein Monom in (1) die oben angenommene Gestalt hat. Deshalb gilt: in jedem Monom in (1) kommen entweder alle w_i , $1 \leq i \leq l$, als Faktor vor oder alle v_i sind gerade. Somit ist $f = p(w_1^2, \dots, w_l^2) + \sum_{\nu \in \mathbb{N}} (w_1 \dots w_l) q_\nu(w_1, \dots, w_l)$, wobei $p, q_\nu \in [t_1, \dots, t_l]$ und in keinem Monom von q_ν als Faktor $w_1 \dots w_l$ vorkommt. Daraus folgt: $p(w_1^2, \dots, w_l^2) \in S_{\text{Int}}(H^*)$, da alle Monome von f in (1), die $w_1 w_2 \dots w_l$ nicht als Faktor besitzen, bei Anwendung von den Elementen von $\text{Int}(W^*, H)$ ineinander übergehen. Damit ist $g := \sum_{\nu \in \mathbb{N}} (w_1 \dots w_l)^\nu q_\nu(w_1, \dots, w_l) \in S_{\text{Int}}(H^*)$. Daraus folgt leicht wegen $g = (w_1 \dots w_l) \sum_{\nu \in \mathbb{N}} (w_1 \dots w_l)^{\nu-1} q_\nu(w_1, \dots, w_l)$, $w_1 \dots w_l \in S_{\text{Int}}(H^*)$ und der Eigenschaft der symmetrischen Algebra $S(H^*)$, keinen Nullteiler zu besitzen, daß $q_\nu(w_1, \dots, w_l) \in S_{\text{Int}}(H^*)$ ist und es gilt: $q_\nu(w_1, \dots, w_l) = \hat{q}_\nu(w_1^2, \dots, w_l^2)$, wobei $\hat{q}_\nu \in [t_1, \dots, t_l]$. Sei o.E.d.A. $f \neq \text{const.}$ Dann werden $p(w_1^2, \dots, w_l^2)$ und $\hat{q}_\nu(w_1^2, \dots, w_l^2)$ als symmetrische Funktionen in $w_1^2, \dots, w_l^2$ nach (B.10bc) von $\{s_1(w_1^2, \dots, w_l^2), \dots, s_l(w_1^2, \dots, w_l^2)\}$ und $1_{S(H^*)}$ erzeugt. Offensichtlich wird $s_1(w_1^2, \dots, w_l^2)$ von $w_1 \dots w_l$ erzeugt. Daraus folgt wegen (1.4)ff und (1.5) die Behauptung. ■

Die im folgenden definierten Lie-Algebren umfassen die Repräsentanten der Isomorphieklassen zu D_1 , die wir in (4.4.5a b) anführen.

(4.4.4) Def.: Seien $g^q := \begin{pmatrix} E_{2l-q} & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$, $q \in \mathbb{N}$ und $1 \leq q \leq l$, $g^0 := E_{2l}$ und

$J_{2l} := \begin{pmatrix} 0 & E_l \\ -E_l & 0 \end{pmatrix}$. Dann definieren wir: $\mathcal{V}(2l-q, q; K) := \{N \in M_{2l}(K) \mid$

$N^t \cdot g^q = -g^q \cdot N\}$, $0 \leq q \leq l$, und $\mathcal{V}^*(2l) := \{N \in M_{2l}(\mathbb{C}) \mid N^t = -N$,

$N^* \cdot J_{2l} = J_{2l} \cdot N\}$.

Für die Lie-Algebren $\mathcal{V}(2l-q, q; K)$ gelten dieselben Aussagen wie in (4.2.4)ff, wenn man dort $2l+1$ durch $2l$ ersetzt. Die reelle Lie-Algebra $\mathcal{V}^*(2l)$ ist isomorph zu der Lie-Algebra der Lie-Gruppe $SO^*(2l) := \{M \in SO(2l, \mathbb{C}) \mid M^* J_{2l} \cdot M^{-1} = J_{2l}\}$ und eine reelle Form von $\mathcal{V}(2l, 0; \mathbb{C})$. Alle diese Algebren sind wegen $l \geq 2$ halbeinfach.

Der folgende Satz umfaßt Aussagen, die in [52; pp 83 - 84, 119] zu finden sind.

(4.4.5) Satz: Seien die Bezeichnungen wie in (4.4.4), $N_{ij}^q \in M_{21}(\mathbb{K})$ mit

$$(N_{ij}^q)_{km} := g_{im}^q \delta_{jk} - g_{jm}^q \delta_{ik}, \quad (g_{ij}^q)_{1 \leq i, j \leq 21} := g^q, \quad 0 \leq q \leq 1,$$

$$1 \leq i, j, k, m \leq 21, \quad B^q := \{N_{ij}^q \mid 1 \leq i < j \leq 21\} \quad \text{und} \quad B_{\mathcal{V}^*(21)} :=$$

$$= \{N_{jk}^0 + N_{j+1, k+1}^0, \quad i(N_{jk}^0 - N_{j+1, k+1}^0), \quad N_{j+1, k}^0 + N_{k+1, j}^0, \quad i(N_{j+1, k}^0 - N_{k+1, j}^0), \quad N_{m, m+1}^0 \mid 1 \leq j < k \leq 1, \quad 1 \leq m \leq 1\}.$$

a) $\mathcal{V}(21-q, q; \mathbb{C}) \in D_1, \quad 1 \geq 4.$

b) Jede der reellen Lie-Algebren $\mathcal{V}(21-q, q; \mathbb{R})$ für $1 \geq 4$ und $\mathcal{V}^*(21)$ für $1 \geq 5$ ist genau ein Repräsentant aus jeder Isomorphieklasse der reellen Formen einer Lie-Algebra aus $D_1, \quad 1 \geq 4.$ $\mathcal{V}(21, 0; \mathbb{R})$ ist kompakt.

c) Die $1(21-1)$ -elementige Menge B^q bzw. $B_{\mathcal{V}^*(21)}$ ist eine Basis von $\mathcal{V}(21-q, q; \mathbb{K})$ bzw. $\mathcal{V}^*(21).$

$$d) [N_{ij}^q, N_{km}^q] = g_{ik}^q N_{jm}^q + g_{jm}^q N_{ik}^q - g_{im}^q N_{jk}^q - g_{jk}^q N_{im}^q.$$

Analoge Aussagen wie in (4.2.5)ff gelten auch hier. Das im folgenden definierte Casimir-Element $\hat{z}_1^q$ besitzt kein Analogon in der Menge der Casimir-Elemente eines Repräsentanten aus B_1 . Die im folgenden Satz zur Darstellung der Casimir-Elemente benutzten Polynome aufgefaßt als Elemente der symmetrischen Algebra sind Elemente der Invariantenalgebra der adjungierten Gruppe. Dies beweist man analog zu dem Beweis von (4.4.6). Damit und mit (1.2) sind die symmetrisierten Elemente der folgenden Casimir-Elemente wieder Casimir-Elemente.

$$(4.4.6) \text{ Satz: Seien } (z_1^q)_{ij} := N_{ij}^q, \quad (z_{n+1}^q)_{ij} := \sum_{k=1}^{21} g_{kk}^q (z_n^q)_{ik} \cdot N_{kj}^q,$$

$$z_n^q := \sum_{k=1}^{21} g_{kk}^q (z_n^q)_{kk} \quad \text{und} \quad \hat{z}_1^q := \sum_{1 \leq i_1, j_1, \dots, j_1 \leq 21} \varepsilon_{i_1, j_1, i_2, j_2, \dots, i_l, j_l}$$

$N_{i_1, j_1}^q \cdot N_{i_2, j_2}^q \cdot \dots \cdot N_{i_l, j_l}^q$, wobei ε der total antisymmetrische Einheits-tensor ist mit $\varepsilon_{1, 2, \dots, 21} = 1, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i, j \leq 21.$ Dann

gilt: $z_n^q, \hat{z}_1^q \in Z^+(\mathcal{V}(21-q, q; \mathbb{K})).$

Bew.: Die Aussage folgt für z_n^q wegen (4.4.5d) analog zu dem Beweis von (4.2.6).

Nun beweisen wir die Behauptung für $\hat{z}_1^q$. Es ist

$$\begin{aligned}
 \overline{\text{ad}(N_{ij}^q)}(\hat{z}_1^q) &= \sum_{\substack{1 \leq m \leq l \\ 1 \leq i_1, j_1, \dots, j_l \leq 2l}} \varepsilon_{i_1 j_1 \dots i_l j_l} N_{i_1 j_1}^q \dots N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q (g_{ii_m}^q N_{jj_m}^q + \\
 &+ g_{jj_m}^q N_{ii_m}^q - g_{ij_m}^q N_{ji_m}^q - g_{ji_m}^q N_{ij_m}^q \cdot N_{i_{m+1} j_{m+1}}^q \dots N_{i_l j_l}^q = \sum_{\substack{1 \leq m \leq l \\ 1 \leq i_1, j_1, \dots, j_{m-1}, j_m, i_{m+1}, \dots, j_l \leq 2l}} \\
 &\varepsilon_{i_1 j_1 \dots j_{m-1} i j_m \dots i_l j_l} g_{ii}^q N_{i_1 j_1}^q \dots N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q \cdot N_{jj_m}^q \cdot N_{i_{m+1} j_{m+1}}^q \dots N_{i_l j_l}^q + \\
 &+ \sum_{\substack{1 \leq m \leq l \\ 1 \leq i_1, j_1, \dots, i_m, i_{m+1}, \dots, j_l \leq 2l}} \varepsilon_{i_1 j_1 \dots i_m j_{m+1} \dots i_l j_l} g_{jj}^q N_{i_1 j_1}^q \dots N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q \cdot \\
 &- \sum_{\substack{1 \leq m \leq l \\ 1 \leq i_1, j_1, \dots, i_m, i_{m+1}, \dots, j_l \leq 2l}} \varepsilon_{i_1 j_1 \dots i_m i_{m+1} \dots i_l j_l} g_{ii}^q N_{i_1 j_1}^q \dots N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q \cdot \\
 &\cdot N_{jj_m}^q \cdot N_{i_{m+1} j_{m+1}}^q \dots N_{i_l j_l}^q - \\
 &- \sum_{\substack{1 \leq m \leq l \\ 1 \leq i_1, j_1, \dots, j_{m-1}, j_m, i_{m+1}, \dots, j_l \leq 2l}} \varepsilon_{i_1 j_1 \dots j_{m-1} j j_m \dots i_l j_l} g_{jj}^q N_{i_1 j_1}^q \dots N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q \cdot \\
 &\cdot N_{jj_m}^q \cdot N_{i_{m+1} j_{m+1}}^q \dots N_{i_l j_l}^q = \\
 &= 2 g_{ii}^q \sum_{\substack{1 \leq m \leq l \\ 1 \leq i_1, j_1, \dots, j_{m-1}, j_m, i_{m+1}, \dots, j_l \leq 2l}} \varepsilon_{i_1 j_1 \dots j_{m-1} i j_m \dots i_l j_l} N_{i_1 j_1}^q \dots N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q \cdot \\
 &\cdot N_{jj_m}^q \cdot N_{i_{m+1} j_{m+1}}^q \dots N_{i_l j_l}^q + \\
 &+ 2 g_{jj}^q \sum_{\substack{1 \leq m \leq l \\ 1 \leq i_1, j_1, \dots, i_m, i_{m+1}, \dots, j_l \leq 2l}} \varepsilon_{i_1 j_1 \dots i_m j_{m+1} \dots i_l j_l} N_{i_1 j_1}^q \dots N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q \cdot \\
 &\cdot N_{ii_m}^q \cdot N_{i_{m+1} j_{m+1}}^q \dots N_{i_l j_l}^q .
 \end{aligned}$$

Nun zeigen wir, daß jede der obigen Summen gleich Null ist. Sei $u_{ij}^q =$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\substack{1 \leq m \leq l \\ 1 \leq i_1, j_1, \dots, j_{m-1}, j_m, i_{m+1}, \dots, j_l \leq 2l}} \varepsilon_{i_1 j_1 \dots j_{m-1} i j_m \dots i_l j_l} N_{i_1 j_1}^q \dots N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q \cdot \\
 &\cdot N_{jj_m}^q \cdot N_{i_{m+1} j_{m+1}}^q \dots N_{i_l j_l}^q .
 \end{aligned}$$

Dann sind nur solche Monome von u_{ij}^q von Null verschieden, für die die $2l-1$ Indizes $i_1, j_1, \dots, j_{m-1}, j_m, i_{m+1}, \dots, j_l$ voneinander und von i verschieden sind und $j_m \neq j$ ist. Deshalb ist für jedes von Null verschiedene Monom von u_{ij}^q genau einer der Indizes $i_1, \dots, j_{m-1}, i_{m+1}, \dots, j_l$ gleich j . Somit und wegen

$$\varepsilon_{i_1 j_1 \dots j_{m-1} i j_m \dots i_1 j_l} = \varepsilon_{i i_1 j_1 \dots j_{m-1} j_m \dots i_1 j_l} \text{ gilt:}$$

$$u_{ij}^q = \sum_{1 \leq m \leq l} \left(\varepsilon_{i j j_1 \dots i_{m-1} j_{m-1} j_m i_{m+1} j_{m+1} \dots i_1 j_l} N_{j j_1}^q \cdot N_{i_2 j_2}^q \cdot \dots \cdot N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q + \varepsilon_{i i_1 j j_2 \dots i_{m-1} j_{m-1} j_m i_{m+1} j_{m+1} \dots i_1 j_l} N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q \cdot N_{j j_m}^q \cdot N_{i_{m+1} j_{m+1}}^q \cdot \dots \cdot N_{i_1 j_1}^q + \dots \right),$$

wobei $\sum'$ bedeutet, daß über die $2l-2$ in jedem obigen Monom auftretenden Indizes, die Elemente von $\{i_k, j_k \mid 1 \leq k \leq l\}$ sind, summiert wird und diese Indizes voneinander und von i und j verschieden sind. Somit ist

$$u_{ij}^q = 2 \sum_{1 \leq m \leq l} \left(\sum_{p < m} \varepsilon_{i j i_1 j_1 \dots i_{p-1} j_{p-1} j_p i_{p+1} j_{p+1} \dots i_{m-1} j_{m-1} j_m i_{m+1} j_{m+1} \dots i_1 j_l} N_{i_1 j_1}^q \cdot N_{i_2 j_2}^q \cdot \dots \cdot N_{i_{p-1} j_{p-1}}^q \cdot N_{j j_p}^q \cdot N_{i_{p+1} j_{p+1}}^q \cdot \dots \cdot N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q \cdot N_{j j_m}^q \cdot N_{i_{m+1} j_{m+1}}^q \cdot \dots \cdot N_{i_1 j_1}^q \right. \\ \left. - \sum_{p > m} \varepsilon_{i j i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_{m-1} j_{m-1} j_m i_{m+1} j_{m+1} \dots i_{p-1} j_{p-1} j_p i_{p+1} j_{p+1} \dots i_1 j_l} N_{i_1 j_1}^q \cdot N_{i_2 j_2}^q \cdot \dots \cdot N_{i_{m-1} j_{m-1}}^q \cdot N_{j j_m}^q \cdot N_{i_{m+1} j_{m+1}}^q \cdot \dots \cdot N_{i_{p-1} j_{p-1}}^q \cdot N_{j j_p}^q \cdot N_{i_{p+1} j_{p+1}}^q \cdot \dots \cdot N_{i_1 j_1}^q \right)$$

Das Minuszeichen vor $\sum_{p > m}$ ergibt sich dadurch, daß in der Summe $\sum_{p > m} \dots$ eine ungerade Zahl von Indizes von dem ε -Tensor übersprungen werden müssen, um j nach vorne zu bringen. Nun vertauschen wir in der zweiten Summe $\sum' \sum_{p > m}$ des obigen Ausdruckes von u_{ij}^q die Indizes p und m . Daraus folgt sofort: $u_{ij}^q = 0$, $1 \leq i, j \leq 2l$. Somit ist $\text{ad}(N_{ij}^q)(\hat{z}_1^q) = 2 g_{ii}^q u_{ij}^q - 2 g_{jj}^q u_{ji}^q = 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Im folgenden Satz, der die Hauptaussage von 4.4 umfaßt, geben wir für verschiedene Repräsentanten aus D_1 und je einen Repräsentanten aus den Isomorphieklassen der reellen Formen von D_1 eine algebraisch unabhängige Menge an, die mit dem Einselement der jeweiligen universellen einhüllenden Algebra die Menge der Casimir-Elemente der entsprechenden Algebra erzeugt.

(4.4.7) Satz: Seien z_n^q und $\hat{z}_1^q$, $0 \leq q \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, wie in (4.4.6). Dann ist $\{z_2^q, z_4^q, \dots, z_{2l-2}^q, \hat{z}_1^q\}$ bzw. $\{Re^{B\phi^*(2l)}(z_2^0), Re^{B\phi^*(2l)}(z_4^0), \dots, Re^{B\phi^*(2l)}(z_{2l-2}^0), Re^{B\phi^*(2l)}(\hat{z}_1^0)\}$ (vgl. (4.4.5), (2.7)) eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathcal{V}(2l-q, q; \mathbb{K}))$ bzw. $Z^+(\phi^*(2l))$.

Bew.: Wir beweisen zunächst die Behauptung für $\{z_2^q, z_4^q, \dots, z_{2l-2}^q, \hat{z}_1^q\}$.

Seien $\hat{D}_1$ wie in (4.4.1), $T_\ell := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ell}} E_\ell & \frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{2}} E_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} E_1 & -\frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{2}} E_1 \end{pmatrix}$ und $f: \mathcal{V}(2l, 0; \mathbb{C}) \longrightarrow \hat{D}_1$,

$f(N) := T_1 \cdot N \cdot T_1^{-1}$. Dann ist $T_1^{-1} = T_1^t \cdot S_1$ und f ein Isomorphismus. Es gilt:

$(T_1 \cdot N_{ij}^0 \cdot T_1^{-1})_{km} = -(T_1)_{ki} (T_1^{-1})_{jm} + (T_1)_{kj} (T_1^{-1})_{im}$, $1 \leq i, j, k, m \leq 2l$. Daraus folgt analog zu dem Beweis von (4.2.7): $f(N_{k,k+1}^0) = i h_k$, $1 \leq k \leq l$, (vgl.

(4.4.1)) und $f(z_n^0) = \varepsilon i^n \sum_{k=1}^l (h_k)^n + f(\{^0_n\})$, wobei $n \in \{2, 4, \dots, 2l-2\}$ und

$f(\{^0_n\})$ kein Monom in den Elementen von B (vgl. (4.4.1)) vom Grade n als Summanden besitzt, das nur von $\{h_k \mid 1 \leq k \leq l\}$ erzeugt wird. Sei $h_{f(z_n^0)} := \{i^n \sum_{k=1}^l (h_k)^n$,

$n \in \{2, 4, \dots, 2l-2\}$. Dann gilt wegen (4.4.1) und $K(h_j, h_k) = 4(1-1) \delta_{jk}$ (vgl. den Beweis von (4.4.2)): $(R \circ \phi \circ \lambda^{-1})(h_{f(z_n^0)})$ ist bis auf eine von Null

verschiedene multiplikative Konstante gleich $\sum_{k=1}^l (w_k)^n$. Nun folgt mit Hilfe einer kombinatorischen Überlegung: $f(\hat{z}_1^0) = (2i)^{l-1} \varepsilon_{1,1+1,2,2+1,\dots,1,2l}$

$h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_l + \hat{f}_1^0$, wobei $\hat{f}_1^0$ kein Monom in den Elementen von B vom Grade l als Summanden besitzt, das nur von $\{h_k \mid 1 \leq k \leq l\}$ erzeugt wird. Es ist

$\varepsilon_{1,1+1,2,2+1,\dots,1,2l} = (-1)^{[\frac{l}{2}]}$, wobei $[\frac{l}{2}]$ die größte natürliche Zahl ist, die kleiner oder gleich $\frac{l}{2}$ ist. Sei $h_{f(\hat{z}_1^0)} := (-1)^{[\frac{l}{2}]} (2i)^{l-1} h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_l$.

Dann ist $(R \circ \sigma \circ \lambda)^1(h_{f(z_1^0)})$ bis auf eine von Null verschiedene multiplikative Konstante gleich $w_1 w_2 \dots w_1$. Somit und mit (4.4.3) erfüllt $\{f(z_2^0), f(z_4^0), \dots, f(z_{2l-2}^0), f(\hat{z}_1^0)\}$ alle Voraussetzungen von (3.2). Daraus folgt wegen der Isomorphieeigenschaft von f mit (2.4) die Behauptung für $\{z_2^0, z_4^0, \dots, z_{2l-2}^0, \hat{z}_1^0\}$. Sei nun $f^q : \mathcal{V}(2l-q, q; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{V}(2l, 0; \mathbb{C})$, $f^q(N) := (g^q)^{-\frac{1}{2}} \cdot N \cdot (g^q)^{\frac{1}{2}}$, $1 \leq q \leq l$.

Dann ist f^q ein Isomorphismus und analog zu dem Beweis von (4.2.7) ist $f^q(z_n^0) = z_n^0$, $n \in \mathbb{N}$. Ferner ist $f^q(\hat{z}_1^0) = (-i)^q \hat{z}_1^0$. Somit und mit (2.4) gilt die Behauptung für $\{z_2^0, z_4^0, \dots, z_{2l-2}^0, \hat{z}_1^0\}$. Um den Rest der Behauptung zu beweisen, genügt es wegen (2.4) zu zeigen, daß $\{Re^{B_{\mathcal{V}^*}(2l)}(z_2^0), Re^{B_{\mathcal{V}^*}(2l)}(z_4^0), \dots, Re^{B_{\mathcal{V}^*}(2l)}(z_{2l-2}^0), Re^{B_{\mathcal{V}^*}(2l)}(\hat{z}_1^0)\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\mathcal{V}(2l, 0; \mathbb{C}))$ ist, da $\mathcal{V}^*(2l)$ eine reelle Form von $\mathcal{V}(2l, 0; \mathbb{C})$ ist. Nun sind alle Monome von z_n^0 , $n \in \mathbb{N}$, bzw. $\hat{z}_1^0$, die vom Grade n bzw. 1 sind und nur von den Elementen von $\{N_{k, k+1}^0 \mid 1 \leq k \leq l\}$ erzeugt werden, reell bezüglich der Basis $B_{\mathcal{V}^*}(2l)$. Damit folgt mit gleicher Argumentation wie vorhin für $\{z_2^0, z_4^0, \dots, z_{2l-2}^0, \hat{z}_1^0\}$ sofort der Rest der Behauptung. ■

Nun geben wir noch eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\hat{D}_1)$ an (vgl. (4.4.1)). Seien $x_i, -i := h_i$, $x_{i, -j} := e_{w_j - w_i}$, $x_{mk} := e_{-w_k - w'_m}$, $x_{-k, -m} := e_{w_k + w_m}$, $i \neq j$, $k < m$, $1 \leq i, j, k, m \leq l$, und $x_{ij} = -x_{ji}$, $i, j \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm l\}$. Dann ist die $l(2l-1)$ -elementige Menge $\{x_{ij} \mid i > j, i, j \neq 0, -1 \leq i, j \leq l\}$ eine Basis von $\hat{D}_1$ und es gilt: $[x_{ij}, x_{km}] = \delta_{j, -k} x_{im} - \delta_{-i, m} x_{kj} + \delta_{j, -m} x_{ki} - \delta_{i, -k} x_{jm}$. Analog zu den Beweisen von (4.4.6) und (4.4.7) zeigt man, daß

$$z_n := \sum_{i_1, \dots, i_n \in \{\pm 1, \dots, \pm l\}} x_{-i_1, i_2} \cdot x_{-i_2, i_3} \cdot \dots \cdot x_{-i_n, i_1}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ und}$$

$$\hat{z}_1 := \sum_{i_1, j_1, \dots, i_l, j_l \in \{\pm 1, \dots, \pm l\}} \varepsilon_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_l j_l} x_{-i_1, -j_1} \cdot \dots \cdot x_{-i_l, -j_l}$$

Elemente von $Z^+(\hat{D}_1)$ sind und daß $\{z_2, z_4, \dots, z_{2l-2}, \hat{z}_1\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(\hat{D}_1)$ ist. Wir bemerken noch, daß wegen der Feststellung unmittelbar vor (4.4.6) zu (4.1.9)ff analoge Aussagen über die Erzeugenden der Invariantenalgebra der adjungierten Gruppe und der Casimir-Elemente

jeder in diesem Teil untersuchten Lie-Algebra gelten.

4.5 Die Casimir-Elemente der Isomorphieklasse G_2 und der Isomorphieklassen der reellen Formen von G_2

In diesem letzten Teil von § 4 geben wir zu je einem Repräsentanten aus G_2 und aus den Isomorphieklassen der reellen Formen einer Lie-Algebra aus G_2 eine algebraisch unabhängige Menge an, die mit dem Einselement der jeweiligen universellen einhüllenden Algebra die Menge seiner Casimir-Elemente erzeugt. Dabei benutzen wir zur Konstruktion der Erzeugendenmengen die Methode, die in (1.20) erläutert ist. Es sei hier auch betont, daß die zwei reellen Formen zu G_2 , die wir in (4.5.1) und (4.5.5) angeben, im Gegensatz zu den Beispielen der Literatur (vgl. [56; p.119]) eine sehr einfache Gestalt haben. Die Hauptergebnisse von 4.5 sind in (4.5.4) und (4.5.6) zu finden.

In [57; pp 103 - 104] wird die im folgenden Satz definierte Menge B als Basis eines Repräsentanten aus G_2 angegeben. Die darüber hinausgehenden Aussagen in (4.5.1) folgen durch Rechnung unter anderem aus den Vertauschungsrelationen der Elemente von B .

(4.5.1) Satz: Seien für $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{K}^3$ die Matrix $M(a) \in M_3(\mathbb{K})$ mit

$$(M(a))_{ij} := \sum_{k=1}^3 \xi_{kji} a_k, \quad 1 \leq i, j \leq 3, \text{ wobei } \xi \text{ der total antisymmetrische}$$

Einheitstensor ist mit $\xi_{123} = 1, \delta \mathcal{L}(3, \mathbb{K})$ wie in (4.1.1),

$$G_2(\mathbb{K}) := \left\{ M \in M_7(\mathbb{K}) \mid M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} a & \sqrt{2} b \\ -\sqrt{2} b^t & S & M(a) \\ -\sqrt{2} a^t & M(b) & -S^t \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{K}^3, S \in \delta \mathcal{L}(3, \mathbb{K}) \right\},$$

$e_{ij} \in M_7(\mathbb{K})$ mit $(e_{ij})_{km} := \delta_{ij} \delta_{km}, 1 \leq i, j, k, m \leq 7, h_1 := e_{22} - e_{55} - e_{33} + e_{66}, h_2 := e_{22} - e_{55} - e_{44} + e_{77}, g_{\alpha_{i,-j}} := e_{i+1,j+1} - e_{j+4,i+4}, 1 \leq i, j \leq 3, g_{\alpha_i} := \sqrt{2} (e_{1,i+1} - e_{i+4,1}) + \xi_{ijk} (e_{k+1,j+4} - e_{j+1,k+4}), g_{\alpha_{-i}} := \sqrt{2} (e_{1,i+4} - e_{i+1,1}) + \xi_{ijk} (e_{k+4,j+1} - e_{j+4,k+1}), (ijk) \in \{(123), (213), (312)\}, \text{ und } B := \{h_1, h_2, g_{\alpha_{i,-j}}, g_{\alpha_i}, g_{\alpha_{-i}} \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3\}. \text{ Dann ist } G_2(\mathbb{K}) \text{ eine Lie-Algebra über } \mathbb{K}, \text{ die}$

14-elementige Menge B eine Basis von $G_2(\mathbb{K})$, $G_2(\mathbb{C}) \in G_2$, die lineare Hülle H von $\{h_1, h_2\}$ eine Cartan-Unteralgebra von $G_2(\mathbb{K})$, die Linearformen α_1 und $\alpha_{1,-3}$ auf H mit $\alpha_1(h_1) := -1$, $\alpha_1(h_2) := -1$, $\alpha_{1,-3}(h_1) := 1$ und $\alpha_{1,-3}(h_2) := 2$ bilden eine Menge von einfachen Wurzeln von H in $G_2(\mathbb{C})$, $\{\alpha_1, \alpha_{1,-3}, \alpha_{-1} := -\alpha_1, \alpha_{3,-1} := -\alpha_{1,-3}, \alpha_{+2} := \pm(2\alpha_1 + \alpha_{1,-3}), \alpha_{+3} := \pm(\alpha_1 + \alpha_{1,-3}), -\alpha_{1,-2} := \alpha_{2,-1} := 3\alpha_1 + \alpha_{1,-3}, -\alpha_{3,-2} := \alpha_{2,-3} := 3\alpha_1 + 2\alpha_{1,-3}\}$ ist die Menge der von Null verschiedenen Wurzeln von H in $G_2(\mathbb{C})$ und die mit diesen Wurzeln indizierten Elemente von B sind Vektoren der zu denselben Wurzeln gehörigen Wurzelräume von H in $G_2(\mathbb{C})$.

Offensichtlich ist $G_2(\mathbb{R})$ eine reelle Form von $G_2(\mathbb{C})$. Ferner ist $G_2(\mathbb{C})$ eine Unter-Lie-Algebra von $\hat{E}_3$ (vgl. (4.2.1)). Damit und nach dem Beweis von (4.2.7) ist $G_2(\mathbb{K})$ isomorph zu einer Unter-Lie-Algebra von $\mathcal{U}(7, 0; \mathbb{K})$ (vgl. (4.2.4)).

Nun beweisen wir einen Satz über die Invarianten der Weyl-Gruppe von $G_2(\mathbb{C})$. den wir zum Beweis von (4.5.3) benutzen.

(4.5.2) Satz: Seien I_2 und I_6 zwei homogene Elemente von $S_{\text{Int}}(H^*)$ mit $\text{grad}(I_2) = 2$ und $\text{grad}(I_6) = 6$ und $\{I_2, I_6\}$ eine algebraisch unabhängige Menge. Dann ist die Vereinigung von $\{I_2, I_6\}$ mit $1_{S(H^*)}$ eine Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(H^*)$.

Bew.: Nach den einleitenden Bemerkungen zu § 4 besitzt $S_{\text{Int}}(H^*)$ zwei homogene Elemente S_2 und S_6 mit $\text{grad}(S_2) = 2$ und $\text{grad}(S_6) = 6$, die mit $1_{S(H^*)}$ ganz $S_{\text{Int}}(H^*)$ erzeugen. Daraus folgt: $I_2 = c S_2$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$. Somit existiert ein $p \in \mathbb{C}[t_1, t_2]$ mit $I_6 = p(I_2, S_6)$. Damit gilt wegen der Grad- und Homogenitätseigenschaften von I_2, I_6 und S_6 : $I_6 = a(I_2)^3 + b S_6$, $a, b \in \mathbb{C}$; dabei ist wegen der algebraischen Unabhängigkeit von $\{I_2, I_6\}$ $b \neq 0$. Daraus folgt, daß $\{S_2, S_6\}$ von $\{I_2, I_6\}$ erzeugt wird. Deshalb gilt die Behauptung. ■

Im folgenden Satz wird eine Erzeugendenmenge von $S_{\text{Int}}(H^*)$ angegeben. (4.5.3) benutzen wir, um in (4.5.4) den Satz (3.2) anwenden zu können.

(4.5.3) Satz: Seien α_1 und $\alpha_{1,-3}$ wie in (4.5.1), $I_2 := (\alpha_1)^2 + (\alpha_1 + \alpha_{1,-3})^2 + (2\alpha_1 + \alpha_{1,-3})^2$ und $I_6 := (\alpha_1)^6 + (\alpha_1 + \alpha_{1,-3})^6 + (2\alpha_1 + \alpha_{1,-3})^6$.

Dann ist $\{I_2, I_6\}$ eine algebraisch unabhängige Menge, die mit ${}^1_{S(H^*)}$ ganz $S_{Int}(H^*)$ erzeugt.

Bew.: Zunächst zeigen wir, daß $I_2, I_6 \in S_{Int}(H^*)$ gilt. Wegen (4.5.1) und (A.14c) genügt es zu zeigen, daß I_2 und I_6 unter der Wirkung von $\tilde{S}_{\alpha_1}$ und $\tilde{S}_{\alpha_{1,-3}}$ invariant bleiben (vgl. (C.4a)). Mit (A.10b f), (4.5.1) und (A.13) berechnet man:

$$S_{\alpha_1}(\alpha_1) = -\alpha_1, \quad S_{\alpha_1}(\alpha_{1,-3}) = 3\alpha_1 + \alpha_{1,-3}, \quad S_{\alpha_{1,-3}}(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_{1,-3}, \\ S_{\alpha_{1,-3}}(\alpha_{1,-3}) = -\alpha_{1,-3}. \quad \text{Daraus folgt sofort: } I_2, I_6 \in S_{Int}(H^*). \quad \text{Sei nun}$$

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial I_2}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial I_2}{\partial \alpha_{1,-3}} \\ \frac{\partial I_6}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial I_6}{\partial \alpha_{1,-3}} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $J(2h_1 + h_2) = -1440$ und damit $J \neq 0$. Daraus folgt mit der im Beweis von (B.6) zitierten Aussage in [53], daß $\{I_2, I_6\}$ algebraisch unabhängig ist. Damit und mit (4.5.2) folgt die Behauptung. ■

Der folgende Satz enthält die erste Hauptaussage von 4.5. Nach der in (1.20) erläuterten Methode werden zwei Casimir-Elemente von $G_2(K)$ konstruiert, die mit ${}^1_{U(G_2(K))}$ das Zentrum von $U(G_2(K))$ erzeugen.

(4.5.4) Satz: Seien G die Matrix

$$\begin{pmatrix}
 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha-1} & -\frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha-2} & -\frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha-3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha 1} & -\frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha 2} & -\frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha 3} \\
 \frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha 1} & \frac{1}{3} (h_1 + h_2) & g_{\alpha 2, -1} & g_{\alpha 3, -1} & 0 & \frac{1}{3} g_{\alpha-3} & -\frac{1}{3} g_{\alpha-2} \\
 \frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha 2} & g_{\alpha 1, -2} & \frac{1}{3} (-2h_1 + h_2) & g_{\alpha 3, -2} & -\frac{1}{3} g_{\alpha-3} & 0 & \frac{1}{3} g_{\alpha-1} \\
 \frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha 3} & g_{\alpha 1, -3} & g_{\alpha 2, -3} & \frac{1}{3} (h_1 - 2h_2) & \frac{1}{3} g_{\alpha-2} & -\frac{1}{3} g_{\alpha-1} & 0 \\
 \frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha-1} & 0 & \frac{1}{3} g_{\alpha 3} & -\frac{1}{3} g_{\alpha 2} & -\frac{1}{3} (h_1 + h_2) & -g_{\alpha 1, -2} & -g_{\alpha 1, -3} \\
 \frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha-2} & -\frac{1}{3} g_{\alpha 3} & 0 & \frac{1}{3} g_{\alpha 1} & -g_{\alpha 2, -1} & \frac{1}{3} (2h_1 - h_2) & -g_{\alpha 2, -3} \\
 \frac{\sqrt{2}}{3} g_{\alpha-3} & \frac{1}{3} g_{\alpha 2} & -\frac{1}{3} g_{\alpha 1} & 0 & -g_{\alpha 3, -1} & -g_{\alpha 3, -2} & \frac{1}{3} (-h_1 + 2h_2)
 \end{pmatrix}$$

$z_2 := \text{spur } (G^2)$ und $z_6 := \text{spur } (G^6)$ (vgl. (1.20)ff). Dann ist $\{z_2, z_6\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $Z^+(G_2(\mathbb{K}))$.

Bew.: Mit (A.10b f g i) und (4.5.1) berechnet man $K(B, B) := \{K(a, b) \mid a, b \in B\}$, wobei K die Killing-Form von $G_2(K)$ ist, und damit $h^1 = \frac{1}{3.8} (2 h_1 - h_2)$, $h^2 = \frac{1}{3.8} (-h_1 + 2h_2)$, $g^{\alpha_i, -j} = \frac{1}{8} g_{\alpha_j, -i}$, $g^{\alpha_i} = -\frac{1}{3.8} g_{\alpha_i}$, $g^{\alpha_i} = -\frac{1}{3.8} g_{\alpha_i}$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq 3$ (vgl. (1.20)).

Sei D die Selbstdarstellung von $G_2(K)$. Dann folgt mit dem Ergebnis der vorherigen Rechnung und (1.20)ff: $\hat{D} = \frac{1}{8} G$. Damit und mit (1.20) ist $\{z_2, z_6\} \subset Z^+(G_2(K))$. Seien $\hat{h}_1 := \frac{1}{4} h_1$, $\hat{h}_2 := \frac{1}{2\sqrt{3}} h_2 - \frac{1}{4\sqrt{3}} h_1$, $w_1 := -2(3\alpha_1 + \alpha_{1,-3})$, $w_2 := 2\sqrt{3}(\alpha_1 + \alpha_{1,-3})$ und $h_{z_k} := 2 \cdot (\frac{1}{3})^k (h_1 + h_2)^k + (h_2 - 2h_1)^k + (h_1 - 2h_2)^k$, $k = 2, 6$. Dann gilt: $K(\hat{h}_i, \hat{h}_j) = d_{ij}$, $w_i(\hat{h}_j) = d_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, und $(R \circ f \circ \lambda^{-1})(h_{z_k}) = 2(\frac{1}{3})^k 24^k ((\alpha_1)^k + (\alpha_1 + \alpha_{1,-3})^k + (2\alpha_1 + \alpha_{1,-3})^k)$ (vgl. (3.2)). Damit und mit (4.5.3) erfüllt $\{z_2, z_6\}$ alle Bedingungen in (3.2). Daraus folgt mit (2.4) die Behauptung. ■

Seien $u := (g_{\alpha_1}, g_{\alpha_2}, g_{\alpha_3})$, $\ell := (g_{\alpha_{-1}}, g_{\alpha_{-2}}, g_{\alpha_{-3}})$, $v := (g_{\alpha_{1,-2}}, g_{\alpha_{1,-3}}, g_{\alpha_{3,-2}})$ und $\check{v} := (g_{\alpha_{2,-1}}, g_{\alpha_{3,-1}}, g_{\alpha_{2,-3}})$. Dann ist $z_2 = 2(-\frac{1}{3}(u \cdot \ell + \ell \cdot u) + (v \cdot \check{v} + \check{v} \cdot v) + \frac{2}{3}((h_1)^2 + (h_2)^2 - h_1 \cdot h_2))$. Wegen (1.20)ff sind z_2 und z_6 aufgefaßt als Elemente von $S(G_2(K))$ Elemente von $S_{\text{Int}}(G_2(K))$.

Im folgenden Satz wird eine reelle kompakte Form von $G_2(\mathbb{C})$ angegeben, die eine bemerkenswert einfache Gestalt hat. Die aus der Literatur bekannten Repräsentanten ihrer Isomorphieklasse werden mit Hilfe komplizierter mathematischer Strukturen erklärt. Wir bemerken, daß eine komplexe Lie-Algebra aus G_2 nach [58; pp 201 - 202] zwei Isomorphieklassen der reellen Formen besitzt.

(4.5.5) Satz: Seien die Bezeichnungen wie in (4.5.1), $G_{2\mathbb{C}} := \{M \in G_2(\mathbb{C}) \mid a = b^*, s^* = -s^t\}$, $\check{h}_1 := \frac{i}{4} h_1$, $\check{h}_2 := \frac{i}{2\sqrt{3}} (h_2 - \frac{1}{2} h_1)$, $x_{j,-k} := g_{\alpha_{j,-k}} - g_{\alpha_{k,-j}}$, $y_{j,-k} := i(g_{\alpha_{j,-k}} + g_{\alpha_{k,-j}})$, $x_k := g_{\alpha_k} + g_{\alpha_{-k}}$, $y_k := i(g_{\alpha_k} - g_{\alpha_{-k}})$, $1 \leq j, k \leq 3$, und $B_{\mathbb{C}} := \{\check{h}_m, x_{j,-k}, y_{j,-k}, x_r, y_r \mid 1 \leq m \leq 2, 1 \leq j < k \leq 3, 1 \leq r \leq 3\}$.

Dann gilt:

a) Jede der reellen Lie-Algebren $G_2(\mathbb{R})$ und $G_{2\mathbb{C}}$ ist genau ein Repräsentant

aus einer der zwei Isomorphieklassen der reellen Formen einer Lie-Algebra aus G_2 . Dabei ist G_{2C} kompakt.

b) Die 14-elementige Menge B_C ist eine Basis von G_{2C} .

Bew.: a) Wegen der Vertauschungsrelationen zwischen den Elementen von B bzw.

B_C folgt, daß $G_2(\mathbb{R})$ bzw. G_{2C} reelle Formen von $G_2(\mathbb{C})$ sind. Nun kann man $K(B, B)$ mit (A. 10b f g i) (4.5.1) berechnen. Daraus folgt: $K(\check{h}_j, \check{h}_k) = -\delta_{jk}$, $1 \leq j, k \leq 2$,

$K(\alpha_{j, -k}, \alpha_{k, -j}) = 8$, $K(\alpha_j, \alpha_{-j}) = -24$. Somit gilt:

$K(\alpha_{1, -2} + \alpha_{2, -1}, \alpha_{1, -2} + \alpha_{2, -1}) = 16$, $K(\alpha_{1, -2} - \alpha_{2, -1}, \alpha_{1, -2} - \alpha_{2, -1}) =$

$= -16$. Damit ist K auf $G_2(\mathbb{R})$ nicht definit und auf G_{2C} , wie leicht durch Anwendung von K auf $B_C \times B_C$ ersichtlich, negativ definit. Deshalb gilt a).

b) Der Beweis ist trivial. ■

Nun folgt die zweite Hauptaussage von 4.5. In (4.5.4) wurden die Casimir-Elemente der reellen nicht-kompakten Form $G_2(\mathbb{R})$ angegeben. In (4.5.6) konstruieren wir eine Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente der kompakten reellen Form G_{2C} .

(4.5.6) Satz: Seien G_{2C} und B_C wie in (4.5.5), G_C die Matrix

$$\begin{array}{cccccccc}
 0 & \frac{\sqrt{2}}{3}(x_1 + iy_1) & \frac{\sqrt{2}}{3}(x_2 + iy_2) & \frac{\sqrt{2}}{3}(x_3 + iy_3) & \frac{\sqrt{2}}{3}(x_1 - iy_1) & \frac{\sqrt{2}}{3}(x_2 - iy_2) & \frac{\sqrt{2}}{3}(x_3 - iy_3) & \\
 -\frac{\sqrt{2}}{3}(x_1 - iy_1) & 4i(\check{h}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\check{h}_2) & x_{1,-2} + iy_{1,-2} & x_{1,-3} + iy_{1,-3} & 0 & -\frac{1}{3}(x_3 + iy_3) & \frac{1}{3}(x_2 + iy_2) & \\
 -\frac{\sqrt{2}}{3}(x_2 - iy_2) & -x_{1,-2} + iy_{1,-2} & 4i(\check{h}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\check{h}_2) & x_{2,-3} + iy_{2,-3} & \frac{1}{3}(x_3 + iy_3) & 0 & -\frac{1}{3}(x_1 + iy_1) & \\
 -\frac{\sqrt{2}}{3}(x_3 - iy_3) & -x_{1,-3} + iy_{1,-3} & -x_{2,-3} + iy_{2,-3} & -\frac{8i}{\sqrt{2}}\check{h}_2 & -\frac{1}{3}(x_2 + iy_2) & \frac{1}{3}(x_1 + iy_1) & 0 & \\
 -\frac{\sqrt{2}}{3}(x_1 + iy_1) & 0 & \frac{1}{3}(-x_3 + iy_3) & \frac{1}{3}(x_2 - iy_2) & -4i(\check{h}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\check{h}_2) & x_{1,-2} - iy_{1,-2} & x_{1,-3} - iy_{1,-3} & \\
 -\frac{\sqrt{2}}{3}(x_2 + iy_2) & \frac{1}{3}(x_3 - iy_3) & 0 & \frac{1}{3}(-x_1 + iy_1) & -(x_{1,-2} + iy_{1,-2}) & 4i(\check{h}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\check{h}_2) & x_{2,-3} - iy_{2,-3} & \\
 -\frac{\sqrt{2}}{3}(x_3 + iy_3) & \frac{1}{3}(-x_2 + iy_2) & \frac{1}{3}(x_1 - iy_1) & 0 & -(x_{1,-3} + iy_{1,-3}) & -(x_{2,-3} + iy_{2,-3}) & \frac{8i}{\sqrt{3}}\check{h}_2 &
 \end{array}$$

$z_{2C} := \text{spur}(G_C^2)$ und $z_{6C} := \text{spur}(G_C^6)$. Dann ist $\{z_{2C}, z_{6C}\}$ eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $\mathbb{Z}^+(G_{2C})$.

Bew. Sei D die Selbstdarstellung von G_{2C} . Dann folgt analog zu der Rechnung im Beweis von (4.5.4): $\hat{D} = -\frac{1}{16} G_C$. Somit ist $\{z_{2C}, z_{6C}\} \subseteq z^+(G_{2C})$. Nun ist

$G_C = -2 G$ (vgl. (4.5.4)). Damit und mit (4.5.4) und (2.4) folgt sofort die Behauptung. ■

Wegen (4.5.4)ff gelten hier zu (4.1.9)ff analoge Aussagen über die Erzeugendenmengen der Invariantenalgebra der adjungierten Gruppe und der Casimir-Elemente jeder in 4.5 untersuchten Lie-Algebra.

Anhänge

In den Anhängen werden solche Begriffe erklärt bzw. Sätze zitiert oder bewiesen, die wir in den Behauptungen sowie in der Beweisführung des Hauptteiles unmittelbar benutzen. Dabei haben wir vorwiegend diejenigen Begriffe definiert, denen man in der Literatur in unterschiedlicher Bedeutung begegnet; damit soll Mißverständnissen vorgebeugt werden.

Im folgenden bedeutet $\mathbb{K}$ entweder die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.

Anhang A Einige Begriffe und Sätze aus der Theorie von Lie-Algebren

Es werden einige Begriffe und Sätze aus der Theorie von Lie-Algebren zusammengestellt, die man zur Untersuchung der Struktur und bei der Darstellungstheorie von Lie-Algebren verwendet.

Im folgenden ist L eine Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ und $[a, b]$, $a, b \in L$, ihr Lie-Produkt.

(A.1) Def.: Eine Unter algebra H von L heißt eine Cartan-Unter algebra, wenn gilt:

(a) H ist nilpotent;

(b) $H = \{x \in L \mid [h, x] \in H, h \in H\}$.

Die adjungierte Darstellung einer Cartan-Unter algebra einer endlichdimensionalen Lie-Algebra L über $\mathbb{C}$ in L ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der Struktur von L . Z.B. kann man damit die komplexen einfachen Lie-Algebren klassifizieren.

(A.2) Satz: Sei $\dim(L) \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Dann gilt:

a) L besitzt eine Cartan-Unter algebra (nach [48; p.59]).

b) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist H genau dann eine Cartan-Unter algebra von L , wenn $H^{\mathbb{C}}$ (vgl. (1.9)) eine Cartan-Unter algebra von $L^{\mathbb{C}}$ ist (nach [48; p.27] und (A.1)).

c) Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ existiert zu zwei Cartan-Unter algebren H_1 und H_2 von L ein innerer Automorphismus $\omega \in \text{Int}(L)$ (vgl. (C.1)) mit $\omega(H_1) = H_2$ (nach [48; p.273]).

d) Für L halbeinfach ist jede Cartan-Unter algebra H von L maximal abelsch (nach [48; p.110] und b)).

e) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und L halbeinfach, so gibt es endlich viele Konjugationsklassen von Cartan-Unteralgebren von L ; dabei heißen zwei Cartan-Unteralgebren H_1 und H_2 zueinander konjugiert, wenn ein $W \in \text{Int}(L)$ existiert mit $W(H_1) = H_2$ (nach [59; pp 89 - 95]).

Wegen (1.9)ff und (A.2bc) haben alle Cartan-Unteralgebren einer endlichdimensionalen Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ dieselbe Dimension. Deshalb ist die folgende Definition sinnvoll.

(A.3) Def.: Seien L eine endlichdimensionale Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ und H eine Cartan-Unteralgebra von L . Dann heißt $l := \dim(H)$ der Rang von L .

(A.4) Satz: a) Seien L über $\mathbb{R}$, $\dim(L) \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, l der Rang von L und $l_{\mathbb{C}}$ der Rang von $L^{\mathbb{C}}$. Dann ist $l = l_{\mathbb{C}}$.

b) Seien L über $\mathbb{C}$, $\dim(L) \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, l der Rang von L und $l_{\mathbb{R}}$ der Rang von $L^{\mathbb{R}}$ (vgl. (2.1)). Dann ist $l_{\mathbb{R}} = 2l$.

Bew.: a) Dies gilt wegen (1.9)ff und (A.2bc).

b) Sei H eine Cartan-Unteralgebra von L . Dann ist $H^{\mathbb{R}}$ eine Cartan-Unteralgebra von $L^{\mathbb{R}}$. Damit und mit (2.1)ff folgt sofort die Behauptung. ■

Nun definieren wir den zentralen Begriff dieser Arbeit, der für die Darstellungstheorie von L von Bedeutung ist.

(A.5) Def.: Seien $T(L)$ die Tensoralgebra von L und $J(L)$ das von den Elementen $[a, b] = a \cdot b + b \cdot a$, $a, b \in L$, erzeugte Ideal in $T(L)$. Dann nennt man die Quotientenalgebra $U(L) := T(L)/J(L)$ die universelle einhüllende Algebra von L ; für $a, b \in U(L)$ schreiben wir das Produkt in $U(L)$ als $a \cdot b$. Die Menge $Z(L) := \{z \in U(L) \mid a \cdot z = z \cdot a, a \in U(L)\}$ heißt das Zentrum von $U(L)$.

$U(L)$ ist eine assoziative Algebra mit Einselement. Die Elemente von $Z(L)$ werden manchmal als Casimir-Elemente von L bezeichnet.

Ist E eine assoziative Algebra über $\mathbb{K}$, so bedeutet E_L im folgenden die mit der Lie-Algebra-Struktur versehene Algebra E .

(A.6) Satz: a) Sei φ die Einschränkung auf L des kanonischen Homomorphismus von $T(L)$ auf $U(L)$. Dann ist φ ein injektiver Homomorphismus von L in $(U(L))_L$ (nach [48; pp 155, 160]).

b) Seien E eine assoziative Algebra über $\mathbb{K}$ mit Einselement, φ wie in a) und ψ ein Homomorphismus von L in E_L . Dann existiert genau ein Homomorphismus $\mathcal{V}$ von $U(L)$ in E mit $\psi = \mathcal{V} \circ \varphi$ (nach [48; pp 152, 155]).

c) Sei k ein Homomorphismus von L in eine Lie-Algebra L' . Dann läßt sich k eindeutig fortsetzen zu einem Homomorphismus K von $U(L)$ in $U(L')$ (nach [48; p.152]); dabei ist K genau dann injektiv bzw. surjektiv, wenn k injektiv bzw. surjektiv ist (nach e)).

d) Seien d eine Derivation von L und $\mathcal{P}$ wie in a). Dann existiert genau eine Derivation $\tilde{d}$ von $U(L)$ mit $\mathcal{P} \circ d = \tilde{d} \circ \mathcal{P}$ (nach [48; p.153]).

e) Seien $\{x_i \mid i \in I\}$ eine Basis von L , wobei I eine geordnete Menge ist, und $\mathcal{P}$ wie in a). Dann ist die Menge der Monome von der Form $\mathcal{P}(x_{i_1})^{\nu_1} \cdot \mathcal{P}(x_{i_2})^{\nu_2} \cdot \dots \cdot \mathcal{P}(x_{i_n})^{\nu_n}$, $\nu_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $i_j \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$, $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$, mit $\mathcal{P}(x_i)^0 := 1_{U(L)}$, $i \in I$, eine Vektorraum-Basis von $U(L)$ (nach [48; pp 159 - 160]). Wir nennen diese Basis die Birkhoff-Witt-Basis von $U(L)$ bezüglich $\{x_i \mid i \in I\}$ und der Ordnung von I .

Mit (A.6d) folgt leicht, daß $Z(L) = \{z \in U(L) \mid \widetilde{\text{ad}}(x)(z) = 0, x \in L\}$ ist (vgl. (A.7)). Im Hauptteil sprechen wir einfach von einer Birkhoff-Witt-Basis von $U(L)$, wenn kein Mißverständnis möglich ist. Nach (A.6a) ist L in $U(L)$ eingebettet. Damit und mit (A.6d) ist $1_{U(L)} U(L)$ eine Erzeugendenmenge von $U(L)$. Daraus folgt, daß jede Darstellung von L in einem Vektorraum V sich eindeutig zu einer Darstellung von $U(L)$ in V fortsetzen läßt und umgekehrt die Einschränkung auf L einer Darstellung von $U(L)$ in V eine Darstellung von L in V ist. Deshalb ist eine Darstellung von L genau dann irreduzibel bzw. vollständig reduzibel, wenn ihre Fortsetzung auf $U(L)$ irreduzibel bzw. vollständig reduzibel ist.

Im folgenden ist L stets eine endlichdimensionale Lie-Algebra über $\mathbb{K}$.

(A.7) Def.: Seien $\text{Der}(L)$ die Menge der Derivationen von L , $\text{ad} : L \rightarrow \text{Der}(L)$, $\text{ad}(a)(b) := [a, b]$, $b \in L$, und H eine Cartan-Unteralgebra von L . Dann heißt eine Abbildung α von H in $\mathbb{K}$ eine Wurzel von H in L , wenn gilt: Es gibt ein $x \in L$ mit $x \neq 0$ und $(\text{ad}(h) - \alpha(h))^n(x) = 0$, $h \in H$, für ein $n = n(h) \in \mathbb{N}$. Der Untervektorraum $L_\alpha := \{x \in L \mid (\text{ad}(h) - \alpha(h))^n(x) = 0 \text{ für ein } n = n(h, x) \in \mathbb{N}, h \in H\}$ von L heißt der zur Wurzel α von H in L gehörige Wurzelraum von H in L .

Die Klassifikation von endlichdimensionalen komplexen einfachen Lie-Algebren basiert auf den beiden Begriffen Cartan-Unteralgebra H einer Lie-Algebra L und Wurzel von H in L .

(A.8) Satz: a) Für $L \neq 0$ ist $\alpha = 0$ eine Wurzel von H in L und es ist $L_0 = H$ (nach [48; pp 57 - 58]):

Ist $\mathcal{H} = \mathcal{C}$, so gilt:

b) $L = H \oplus_{\alpha \in W^*} L_\alpha$, wobei W^* die Menge der von Null verschiedenen Wurzeln von H in L bezeichnet (nach [48; p. 63]).

c) Sind α und β Wurzeln von H in L , so ist nach [48; p. 64] :

$$[L_\alpha, L_\beta] \subseteq \begin{cases} L_{\alpha+\beta} & , \text{ wenn } \alpha + \beta \text{ eine Wurzel ist} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

d) Die Wurzeln von H in L sind lineare Funktionale auf H (nach [48; p.51]).

Nun definieren wir eine Bilinearform auf $L \times L$, mit deren Hilfe wir die Weyl-Gruppe einer endlichdimensionalen komplexen halbeinfachen Lie-Algebra erklären.

(A.9) Def.: Die symmetrische Bilinearform $K : L \times L \rightarrow \mathcal{K}$, $K(a,b) := \text{spur}(\text{ad}(a) \circ \text{ad}(b))$, heißt die Killing-Form von L .

Man rechnet leicht nach, daß $K(g(a), g(b)) = K(a,b)$ ist, $g \in \text{Aut}(L)$.

Im folgenden ist L eine endlichdimensionale komplexe halbeinfache Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra von L , l der Rang von L , L^* bzw. H^* der algebraische Dualraum von L bzw. H und W^* die Menge der von Null verschiedenen Wurzeln von H in L .

(A.10) Satz: a) Die symmetrischen Bilinearformen K auf $L \times L$ und $K|_{H \times H}$ sind

nicht entartet (nach [48; pp 69 - 70, 109]). Damit ist die Abbildung

$\mathcal{J} : L \rightarrow L^*$, $\mathcal{J}(x) := K(x, \cdot)$, linear und bijektiv; dabei ist $K(x, \cdot) : L \rightarrow \mathcal{C}$, $K(x, \cdot)(y) := K(x, y)$.

b) Es ist $\mathcal{J}(H) = H^*$ und wir setzen $h_\rho := \mathcal{J}^{-1}(\rho)$, $\rho \in H^*$ (vgl. [48; p.110]). Damit ist $B : H^* \times H^* \rightarrow \mathcal{C}$, $B(\rho, \sigma) := K(h_\rho, h_\sigma)$ eine nicht entartete symmetrische Bilinearform.

c) $B(\alpha, \alpha) \neq 0$, $\alpha \in W^*$ (nach [48; p.110]).

d) Es gibt l linear unabhängige Wurzeln von H in L , d.h. H^* ist die lineare Hülle von W^* (nach [48; p.109]).

e) Mit α ist auch $-\alpha$ eine Wurzel von H in L (nach [48; p.109]).

f) $K(h, h') = \sum_{\alpha \in W^*} \alpha(h) \alpha(h')$, $h, h' \in H$ (nach [48; p.109] und h)).

g) Für $\alpha, \beta \in \{0\} \cup W^*$ und $\alpha \neq -\beta$ ist $K(e_\alpha, e_\beta) = 0$, $e_\alpha \in L_\alpha$, $e_\beta \in L_\beta$ (nach [48; p.108]).

Für $\alpha \in W^*$ gilt:

h) $\dim(L_\alpha) = 1$ (nach [48; p.111]).

i) $[h, e_\alpha] = \alpha(h) e_\alpha$, $h \in H$, $e_\alpha \in L_\alpha$ (nach [48; p.51] und h)).

j) $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = K(e_\alpha, e_{-\alpha}) h_\alpha$, $e_\alpha \in L_\alpha$, $e_{-\alpha} \in L_{-\alpha}$ (nach [48; p.110]).

Es ist zu bemerken, daß die Aussagen (A.10 a b) auch für reelle halbeinfache Lie-Algebren gelten. Nach (A.10e) ist $\text{card}(W^*)$ eine gerade Zahl. Nun führen wir den Begriff einer Menge von einfachen Wurzeln ein, die gemeinsam mit der Cartan-Matrix die Menge der Wurzeln von H in L bestimmt.

(A.11) Def.: Eine Menge π von Wurzeln von H in L heißt eine Menge von einfachen Wurzeln, wenn gilt:

(a) π ist linear unabhängig;

(b) jede Wurzel β hat die Darstellung: $\beta = \sum_{\alpha \in \pi} n_\alpha^\beta \alpha$, wobei n_α^β ganze Zahlen sind, die, für β fest, alle nicht negativ oder alle nicht positiv sind.

Mit Hilfe einer Menge π von einfachen Wurzeln kann man eine Erzeugendenmenge einer Basis von L konstruieren. Ferner kann man mit π eine Ordnungsrelation in dem reellen Vektorraum $H_\mathbb{O}^*$ definieren, der von den Wurzeln von H in L erzeugt wird. Danach und mit (A.11b) spricht man von einer positiven bzw. negativen Wurzel β , wenn $\beta \in W^*$ und $n_\alpha^\beta \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ bzw. $-n_\alpha^\beta \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ist. Nach (A.10e) bestimmt die Menge der positiven Wurzeln W^+ die Menge der negativen Wurzeln W^- .

(A.12) Satz: a) Es existiert eine Menge von einfachen Wurzeln (nach [48; p.120]).

b) Jede Menge von einfachen Wurzeln von H in L ist eine Basis von H^* (nach [48; p.120]).

Nun definieren wir die Weyl-Gruppe, die für die Darstellungstheorie von halbeinfachen Lie-Algebren von Bedeutung ist.

(A.13) Def.: Die von den linearen Bijektionen $S_\alpha : H^* \rightarrow H^*$, $S_\alpha(\rho) = \rho - \frac{2B(\rho, \alpha)}{B(\alpha, \alpha)} \alpha$, $\alpha \in W^*$, erzeugte Gruppe heißt die Weyl-Gruppe von L bezüglich H und wird mit $\text{Int}(W^*, H)$ bezeichnet.

S_α ist eine Spiegelung (Weyl-Spiegelung) von H^* (vgl. (1.4)); sie läßt die Hyperebene, die in bezug auf B orthogonal zu α ist, punktweise invariant. Sind H_1 und H_2 zwei Cartan-Unteralgebren von L und W_1^* bzw. W_2^* die Menge der von Null verschiedenen Wurzeln von H_1 bzw. H_2 in L , so sind $\text{Int}(W_1^*, H_1^*)$ und $\text{Int}(W_2^*, H_2^*)$ zueinander isomorph. In diesem Sinne spricht man von der Weyl-Gruppe schlechthin einer halbeinfachen Lie-Algebra.

(A.14) Satz: a) $\text{Int}(W^*, H)$ ist eine endliche Gruppe (nach [48; p.119]).

b) Die Menge der Wurzeln von H in L ist unter $\text{Int}(W^*, H)$ invariant (nach [48; p.119]).

c) Sei π eine Menge von einfachen Wurzeln von H in L . Dann wird $\text{Int}(W^*, H)$ von den Spiegelungen S_{α_i} , $\alpha_i \in \pi$, $1 \leq i \leq l$, erzeugt (nach [48; p.241]).

(A.15) Def.: Sei $i: H^* \rightarrow H$, $i(p) := h_p$ der Vektorraum-Isomorphismus wie in (A.10b). Dann bezeichnen wir die von den linearen Bijektionen $\hat{S}_\alpha := i \circ S_\alpha \circ i^{-1}$, $\alpha \in W^*$, von H auf H erzeugte Gruppe mit $\hat{\text{Int}}(W^*, H)$.

Es ergibt sich: $\hat{S}_\alpha(h) = h - \frac{2K(h, h_\alpha)}{K(h_\alpha, h_\alpha)} h_\alpha$, $h \in H$. Für $\hat{\text{Int}}(W^*, H)$ gelten

offensichtlich zu (A.13)ff und (A.14) analoge Aussagen, wobei die Wurzeln $\alpha \in H^*$ durch die Elemente $h_\alpha \in H$ zu ersetzen sind.

Anhang B Einige Begriffe und Sätze aus der Algebra

Es werden die Begriffe Erzeugendenmenge einer Algebra und algebraisch unabhängige Menge einer assoziativen und kommutativen Algebra definiert und damit einige Sätze über die algebraische Unabhängigkeit von Erzeugendenmengen der Polynomalgebra $K[t_1, \dots, t_n]$ bewiesen. Ferner werden die symmetrische Algebra sowie die Algebra der Polynomfunktionen von einem Vektorraum definiert und einige wesentliche Sätze über diese Algebra angegeben.

Mit einer Algebra E über dem Körper K meinen wir stets einen Vektorraum E über K mit einer bilinearen Multiplikation „ $\cdot$ “, d.h. für $x_1, x_2, y \in E$ und $a \in K$ gilt: $x_1 \cdot x_2 \in E$, $y \cdot (x_1 + x_2) = y \cdot x_1 + y \cdot x_2$, $(x_1 + x_2) \cdot y = x_1 \cdot y + x_2 \cdot y$, $a(x_1 \cdot y) = (ax_1) \cdot y = x_1 \cdot (ay)$. Ferner ist mit einer Basis einer Algebra eine Vektorraum-basis dieser Algebra gemeint. Wir treffen folgende Konventionen: Ein Homomorphismus einer assoziativen Algebra mit Einselement in eine assoziative Algebra mit Einselement soll das Einselement auf das Einselement abbilden. Für die multiplikative Verknüpfung einer kommutativen assoziativen Algebra schreiben wir kein Zeichen.

(B.1) Def.: Seien E eine Algebra über K und Σ eine Untermenge von E . Dann heißt Σ eine Erzeugendenmenge von E , wenn E der Durchschnitt aller Unteralgebren von E ist, die Σ enthalten. Eine Erzeugendenmenge Σ von E heißt minimal, wenn kein Element von Σ von den übrigen Elementen von Σ erzeugt wird.

Danach kann jedes Element von E durch ein Polynom in den Elementen von $\sum$ dargestellt werden.

(B.2) Def.: Seien E eine assoziative und kommutative Algebra über K und Λ eine Untermenge von E . Dann heißt Λ algebraisch abhängig über K , wenn ein $n \in \mathbb{N}$, ein $p \in K[t_1, \dots, t_n]$ mit $p \neq 0$ und eine Menge $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \Lambda$ existieren mit $p(a_1, \dots, a_n) = 0$; anderenfalls heißt Λ algebraisch unabhängig über K .

Wenn kein Mißverständnis möglich ist, dann sprechen wir einfach von einer algebraisch abhängigen oder unabhängigen Menge. Jede Obermenge bzw. Untermenge einer algebraisch abhängigen bzw. unabhängigen Menge ist algebraisch abhängig bzw. unabhängig. Eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von E ist minimal.

(B.3) Satz: Seien E eine assoziative und kommutative Algebra über $\mathbb{R}$, Λ eine Untermenge von E und $E^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von E (vgl. (1.9)). Dann ist Λ genau dann algebraisch abhängig über $\mathbb{R}$, wenn $\Lambda^{\mathbb{C}} = \{(x, 0) \in E^{\mathbb{C}} \mid x \in \Lambda\}$ algebraisch abhängig ist über $\mathbb{C}$.

Bew.: Seien $n \in \mathbb{N}$, $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \Lambda$ und $p \in \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]$ mit $p \neq 0$ und $p(a_1, \dots, a_n) = 0$. Dann fassen wir p als Element von $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ auf und es gilt wegen der Multiplikationsvorschrift in $E^{\mathbb{C}}$ (vgl. (1.9)): $p((a_1, 0), \dots, (a_n, 0)) = 0$. Seien umgekehrt $\{(a_1, 0), \dots, (a_n, 0)\} \subseteq \Lambda^{\mathbb{C}}$ und $p \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ mit $p \neq 0$ und $p((a_1, 0), \dots, (a_n, 0)) = 0$. Dann gilt: $p = p_1 + ip_2$ mit $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[t_1, \dots, t_n]$, p_1 oder p_2 ist ungleich Null und $p_1(a_1, \dots, a_n) = p_2(a_1, \dots, a_n) = 0$. Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Im folgenden fassen wir einige Eigenschaften der Polynomalgebra zusammen.

(B.4) Def.: Sei $K[t_1, \dots, t_n]$ die Polynomalgebra in n Unbestimmten über K , $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $K^+[t_1, \dots, t_n]$ die Unter algebra von $K[t_1, \dots, t_n]$, die von $\{t_1, \dots, t_n\}$ erzeugt wird.

Entwickelt man ein Element p von $K^+[t_1, \dots, t_n]$ nach der Basis $\{t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n} \mid \nu_1, \dots, \nu_n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$, so kommt in dieser Darstellung von p keine Konstante als Summand vor, die ungleich Null ist. $K^+[t_1, \dots, t_n]$ ist ein Ideal in $K[t_1, \dots, t_n]$. Im folgenden machen wir einige Aussagen über die Erzeugendenmengen von $K^+[t_1, \dots, t_n]$:

$K^+[t_1, \dots, t_n]$ besitzt minimale Erzeugendenmengen $\sum$ derart, daß $\text{card}(\sum) > n$

ist. z.B. $\Sigma := \{t_i - t_i^m, t_i^m \mid 1 \leq i \leq n\}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, ist eine minimale Erzeugendenmenge von $\mathbb{K}^+[t_1, \dots, t_n]$ mit $\text{card}(\Sigma) = 2n$. Jede derartige minimale Erzeugendenmenge ist wegen des folgenden Satzes algebraisch abhängig.

(B.5) Satz: (nach [53; p.125]) Mehr als n Polynome von $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ sind algebraisch abhängig.

(B.5) und der folgende Satz charakterisieren wegen (B.7) vollständig die algebraische Unabhängigkeit von Erzeugendenmengen von $\mathbb{K}^+[t_1, \dots, t_n]$.

(B.6) Satz: Sei $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine Erzeugendenmenge von $\mathbb{K}^+[t_1, \dots, t_n]$. Dann ist $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine algebraisch unabhängige Menge.

Bew.: Wegen der erzeugenden Eigenschaft von $\{f_1, \dots, f_n\}$ gibt es Polynome p_i von

$$\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n], \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{mit } t_i = p_i(f_1, \dots, f_n). \quad \text{Es gilt: } \frac{\partial t_i}{\partial t_j} = \frac{\partial p_i}{\partial f_k} \frac{\partial f_k}{\partial t_j}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad \text{Daraus folgt, daß } \det\left(\left(\frac{\partial p_i}{\partial f_k}\right)_{1 \leq i, k \leq n}\right)$$

$$\det\left(\left(\frac{\partial f_k}{\partial t_j}\right)_{1 \leq k, j \leq n}\right) = 1 \text{ ist. Damit gilt: } \det\left(\left(\frac{\partial f_k}{\partial t_j}\right)_{1 \leq k, j \leq n}\right)^* \neq 0.$$

Nun ist nach [53; p.134] $\{f_1, \dots, f_n\}$ genau dann algebraisch unabhängig, wenn

$$\det\left(\left(\frac{\partial f_k}{\partial t_j}\right)_{1 \leq k, j \leq n}\right)^* \neq 0 \text{ ist.}$$

(B.7) Satz: Es gibt keine Erzeugendenmenge von $\mathbb{K}^+[t_1, \dots, t_n]$, deren Mächtigkeit kleiner als n ist.

Bew.: Angenommen es existiert eine Erzeugendenmenge $\Sigma := \{f_1, \dots, f_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, von $\mathbb{K}^+[t_1, \dots, t_n]$ mit $m < n$. Dann ergibt die Adjunktion von $(n-m)$ paarweise verschiedenen Polynomen von $\mathbb{K}^+[t_1, \dots, t_n]$ zu Σ , die kein Element von Σ sind, eine Erzeugendenmenge, die algebraisch abhängig und deren Mächtigkeit gleich n ist. Dies ist aber ein Widerspruch zu (B.6).

Ferner bemerken wir, daß es algebraisch unabhängige Mengen von der Mächtigkeit n von Elementen von $\mathbb{K}^+[t_1, \dots, t_n]$ gibt, die keine Erzeugendenmenge von $\mathbb{K}^+[t_1, \dots, t_n]$ sind. z.B. ist $\{t_i^m \mid 1 \leq i \leq n\}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, eine solche Menge.

(B.8) Korollar: Sei $\{f_1, \dots, f_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge von $\mathbb{K}^+[t_1, \dots, t_n]$. Dann ist $m = n$.

Bew.: Dies folgt aus (B.5) und (B.7)

(B.9) Def.: Sei $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ die Polynomalgebra in n Unbestimmten über $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir die folgenden n Polynome

a) $\varphi_k := \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_k}$, $1 \leq k \leq n$, die symmetrischen Grundfunktionen in n Unbestimmten.

b) $s_k := \sum_{i=1}^n t_i^k$, $1 \leq k \leq n$, die Potenzsummen in n Unbestimmten.

Mit dem im Beweis von (B.6) benutzten Kriterium in [53; p.134] kann man leicht zeigen, daß $\{s_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ algebraisch unabhängig ist.

(B.10) Satz: a) $\{\varphi_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ ist algebraisch unabhängig (nach [53; pp 143 - 144]).

b) $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]^U \{\varphi_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ ist eine Erzeugendenmenge der Invariantenalgebra der symmetrischen Gruppe S_n , d.h. der Untermenge der symmetrischen Funktionen von $\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ (nach [60; pp 37 - 39]).

c) Die symmetrischen Grundfunktionen sind durch die Potenzsummen algebraisch darstellbar und umgekehrt (nach [53; pp 151, 164]).

(B.11) Satz: Die Abbildung $S: \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m] \rightarrow \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_m]$, $S(\sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \{0\} \cup \mathbb{N}}} a_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} \otimes y_1^{\mu_1} \dots y_m^{\mu_m}) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \{0\} \cup \mathbb{N}} a_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n} \hat{t}_1^{\mu_1} \dots \hat{t}_m^{\mu_m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, ist ein Isomorphismus.

$$\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_m], S(\sum_{\substack{\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \{0\} \cup \mathbb{N}}} a_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} \otimes y_1^{\mu_1} \dots y_m^{\mu_m}) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \{0\} \cup \mathbb{N}} a_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n} \hat{t}_1^{\mu_1} \dots \hat{t}_m^{\mu_m}$$

$$y_1^{\mu_1} \dots y_m^{\mu_m}) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n, \mu_1, \dots, \mu_m \in \{0\} \cup \mathbb{N}} a_{\nu_1 \dots \nu_n, \mu_1 \dots \mu_m} t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n} \hat{t}_1^{\mu_1} \dots \hat{t}_m^{\mu_m}$$

$t_1^{\nu_1} \dots t_n^{\nu_n} \hat{t}_1^{\mu_1} \dots \hat{t}_m^{\mu_m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, ist ein Isomorphismus.

Bew.: Da $\{x_1^{\nu_1} \dots x_n^{\nu_n} \otimes y_1^{\mu_1} \dots y_m^{\mu_m} \mid (\nu_1, \dots, \nu_n) \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^n, (\mu_1, \dots, \mu_m) \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^m, n, m \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m]$ ist, bildet S Basiselemente auf Basiselemente ab. Somit ist S bijektiv und linear. Die Homomorphie-eigenschaft von S ist trivial.

(B.12) Def.: Seien $T(V)$ die Tensoralgebra eines Vektorraumes V über $\mathbb{K}$ und I das Ideal in $T(V)$, das von den Elementen $x \cdot y - y \cdot x$, $x, y \in V$, erzeugt wird. Dann heißt die Quotientenalgebra $S(V) := T(V)/I$ die symmetrische Algebra von V .

(B.13) Satz: a) $S(V)$ ist eine assoziative und kommutative Algebra (nach [61; p.93]).

b) Die Einschränkung τ auf V bzw. $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}$ des kanonischen Homomorphismus von $T(V)$ auf $S(V)$ ist injektiv (nach [61; p.93]).

c) $1 \in \mathcal{K}$ und eine Basis von V erzeugen $S(V)$ (nach [61; p.93]).

d) Ein Homomorphismus f von V in einen Vektorraum V' kann eindeutig fortgesetzt werden zu einem Algebra-Homomorphismus $\tilde{f}$ vom Grade Null (vgl. (B.16)) von $S(V)$ in $S(V')$ mit $\tilde{f}(\tau(x)) = \tau'(f(x))$, $x \in V$, wobei τ wie in b) und τ' die Einschränkung auf V' des kanonischen Homomorphismus von $T(V')$ auf $S(V')$ ist; dabei ist $\tilde{f}$ injektiv bzw. surjektiv, wenn f injektiv bzw. surjektiv ist (nach [61; p. 193]).

e) Ein Endomorphismus f von V kann eindeutig fortgesetzt werden zu einer Derivation d_f vom Grade Null (vgl. (B.16)) von $S(V)$ mit $d_f(\tau(x_1)\tau(x_2)\dots$

$$\tau(x_n)) = \sum_{j=1}^n \tau(x_1)\tau(x_2)\dots\tau(x_{j-1})\tau(f(x_j))\tau(x_{j+1})\dots\tau(x_n),$$

$n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in V$, wobei τ wie in b) ist (nach [61; p.203]).

f) Ist $\dim(V) = n$, $n \in \mathbb{N}$, und $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von V , so gibt es genau einen Isomorphismus $f: S(V) \rightarrow \mathcal{K}$ $[t_1, \dots, t_n]$ mit $f(\tau(x_i)) = t_i$, $1 \leq i \leq n$, wobei τ wie in b) ist (nach [61; p.203]).

Wegen (B.13b) kann man V und $\mathcal{K}$ in $S(V)$ einbetten.

(B.14) Def.: Sei V ein Vektorraum über $\mathcal{K}$ und V^* der algebraische Dualraum von V . Dann heißt $S(V^*)$ die Algebra der Polynomfunktionen von V und wird mit $P(V)$ bezeichnet.

Jedes Element von $P(V)$ hat eine Polynomdarstellung in linearen Funktionalen auf V . Damit ist $P(V)$ in der Menge der Funktionale auf V enthalten. Ist $\dim(V) \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, so ist V zu V^* isomorph und deshalb gibt es nach (B.13d) einen Algebra-Isomorphismus von $S(V)$ auf $P(V)$.

(B.15) Def.: Sei E eine Algebra über $\mathcal{K}$. Dann heißt E

a) graduirt, wenn gilt: $E = \bigoplus_{i=0}^{\infty} E_i$ mit $E_i \cdot E_j \subseteq E_{i+j}$, wobei E_i , $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, ein Untervektorraum von E ist; ein Element von E_i heißt dann ein homogenes Element vom Grade i .

b) filtriert, wenn für jedes $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ ein Untervektorraum $E^{(i)}$ von E erklärt ist mit:

(1) $E^{(i)} \subseteq E^{(j)}$ für $i \leq j$, $i, j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;

(2) $\bigcup_{i=0}^{\infty} E^{(i)} = E$;

ein Element $a \in E$ heißt vom Grade i , wenn $i = \inf \{ j \mid a \in E^{(j)} \}$.

Eine Unteralgebra A einer graduierten Algebra E heißt homogen, wenn $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ mit $A_i = A \cap E_i$, $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, ist. Damit ist eine homogene Unteralgebra eine graduierte Algebra. A ist genau dann eine homogene Unteralgebra von E , wenn die homogenen Komponenten jedes Elementes von A Elemente von A sind. Eine graduierte Algebra E kann mit $E^{(i)} := \sum_{0 \leq j \leq i} E_j$ zu einer filtrierten Algebra gemacht werden. Beispiele für graduierte Algebren sind die Tensoralgebra, die symmetrische Algebra und die Polynomalgebra. Die Algebra $S_{\text{Int}}(L)$ bzw. $S_{\text{Int}}(H^*)$ (vgl. (C.1), (C.4), (C.7)) ist eine homogene Unteralgebra von $S(L)$ bzw. $S(H^*)$. Die universelle einhüllende Algebra einer Lie-Algebra ist eine filtrierte Algebra.

(B.16) Def.: Seien E und E' graduierte Algebren über K , E'' eine filtrierte Algebra über K , λ bzw. λ' eine lineare Abbildung von E in E' bzw. von E in E'' und $\nu \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Dann heißt λ bzw. λ' vom Grade ν , wenn gilt:
 $\lambda(E_i) \subseteq E'_{i+\nu}$ bzw. $\lambda'(E_i \setminus \{0\}) \subseteq E''_{(i+\nu)} \setminus E''_{(i+\nu-1)}$, $i \in \{0\} \cup \mathbb{N}$
 und $E''_{(-1)} = \emptyset$.

Die Abbildung λ in (1.1) ist ein Beispiel für eine Abbildung vom Grade Null.

(B.17) Def.: Seien E_1 und E_2 Algebren über K . Dann nennt man die direkte Vektorraum-Summe $E_1 \oplus E_2$ mit der multiplikativen Verknüpfung $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) := (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$, $x_i, y_i \in E_i$, $i = 1, 2$, die direkte Algebra-Summe von E_1 und E_2 , bezeichnet mit $E_1 \diamond E_2$.

$E_1 \diamond E_2$ ist eine Algebra über K . Die Abbildung $I_1 : E_1 \rightarrow E_1 \diamond E_2$,
 $I_1(x) := (x, 0)$, bzw. $I_2 : E_2 \rightarrow E_1 \diamond E_2$, $I_2(y) := (0, y)$, ist ein injektiver Algebra-Homomorphismus und $I_i(E_i)$, $i = 1, 2$, ist ein Ideal in $E_1 \diamond E_2$.

Anhang C: Invarianten einer Gruppe von Automorphismen eines Vektorraumes

Es wird gezeigt, daß die Algebra der Invarianten von $\text{Int}(L)$ bzw. von der Weyl-Gruppe in der symmetrischen Algebra $S(L)$ bzw. $S(H)$ isomorph ist zu der entsprechenden Invariantenalgebra in der Algebra der Polynomfunktionen $P(L)$ bzw. $P(H)$.

Im folgenden ist L eine endlichdimensionale Lie-Algebra über $\mathbb{K}$.

(C.1) Def.: Sei $\text{Aut}(L)$ die Automorphismengruppe von L . Dann bezeichnet $\text{Int}(L)$ die von $\exp(\text{ad}(L))$ erzeugte zusammenhängende Lie-Untergruppe von $\text{GL}(L)$. $\text{Int}(L)$ heißt die zu L adjungierte Gruppe und ihre Elemente heißen innere Automorphismen von L .

Die Lie-Algebra von $\text{Int}(L)$ ist zu $\text{ad}(L)$ (vgl. (A.7)) isomorph; $\text{Int}(L)$ ist eine Untergruppe von $\text{Aut}(L)$ (nach [55; p.117])^{*}

(C.2) Def.: Seien G eine Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$, L ihre Lie-Algebra über $\mathbb{K}$ und $I_g : G \rightarrow G$, $I_g(g') := g g' g^{-1}$, für $g \in G$. Dann heißt der Homomorphismus $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(L)$, $\text{Ad}(g) := dI_g$, wobei dI_g das Differential von I_g im Einselement von G ist, die adjungierte Darstellung von G .

Der folgende Satz gibt den Zusammenhang zwischen (C.1) und (C.2) an.

(C.3) Satz: Seien G eine zusammenhängende Lie-Gruppe über $\mathbb{K}$ und L ihre Lie-Algebra über $\mathbb{K}$. Dann gilt: $\text{Ad}(G) = \text{Int}(L)$ (nach [55; p.119]).

Nun definieren wir einen Begriff, der im Hauptteil eine zentrale Bedeutung hat.

(C.4) Def.: Seien V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, G eine Gruppe von Automorphismen von V und $\tilde{g}$ die eindeutige Fortsetzung von $g \in G$ zu einem Algebra-Automorphismus von $S(V)$ (vgl. (B.13d)). Dann heißt:

- die Menge $S_G(V) := \{s \in S(V) | \tilde{g}(s) = s, g \in G\}$ die Menge der Invarianten von G in der symmetrischen Algebra $S(V)$ von V .
- die Menge $P_G(V) := \{p \in P(V) | p \circ g = p, g \in G\}$ die Menge der Invarianten von G in der Algebra der Polynomfunktionen $P(V)$ von V .

^{*}) Die hier und in (C.3) gemachten Aussagen werden in [55; pp 116 - 119] für reelle Lie-Algebren und reelle Lie-Gruppen bewiesen; nach [62; pp 160 - 161, 190, 227 - 228] gelten sie auch für komplexe Lie-Algebren und komplexe Lie-Gruppen.

Offensichtlich sind $S_G(V)$ bzw. $P_G(V)$ Unteralgebren von $S(V)$ bzw. $P(V)$.

(C.5) Satz: Seien V , G und $\tilde{g}$ wie in (C.4), $\hat{g} : P(V) \rightarrow P(V)$, $\hat{g}(p) := p \circ g^{-1}$, $g \in G$, und Q eine unter G invariante Bilinearform auf $V \times V$. Dann gibt es einen Homomorphismus d_Q vom Grade Null (vgl. (B.16)) von $S(V)$ in $P(V)$ mit $\hat{g} \circ d_Q = d_Q \circ \tilde{g}$ und es gilt: $d_Q(S_G(V)) \subseteq P_G(V)$. Ist überdies V endlichdimensional und Q nicht entartet, so ist d_Q ein Isomorphismus und es gilt: $d_Q(S_G(V)) = P_G(V)$.

Bew.: Seien V^* der algebraische Dualraum von V und $d_Q : V \rightarrow V^*$, $d_Q(x) := Q(x, \cdot)$, wobei $Q(x, \cdot)(y) := Q(x, y)$, $y \in V$. d_Q ist eine lineare Abbildung und nach (B.13d) läßt sie sich fortsetzen zu einem Algebra-Homomorphismus vom Grade Null von $S(V)$ in $S(V^*) = P(V)$, den wir wieder mit d_Q bezeichnen. Seien B eine Basis von V und $s \in S(V)$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, eine Menge $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq B$ und ein $f \in K[t_1, \dots, t_n]$ mit $s = f(x_1, \dots, x_n)$. Es ist: $(\hat{g} \circ d_Q)(s) = \hat{g}(f(Q(x_1, \cdot), \dots, Q(x_n, \cdot))) = f(Q(x_1, \cdot), \dots, Q(x_n, \cdot)) \circ g^{-1} = f(Q(x_1, g^{-1}(\cdot)), \dots, Q(x_n, g^{-1}(\cdot))) = f(Q(g(x_1), \cdot), \dots, Q(g(x_n), \cdot)) = d_Q(f(g(x_1), \dots, g(x_n))) = (d_Q \circ \tilde{g})(s)$, wobei das vierte Gleichheitszeichen wegen der Voraussetzung $Q(g(x), g(y)) = Q(x, y)$ gilt. Damit ist $d_Q(S_G(V)) \subseteq P_G(V)$. Ist Q nicht entartet, so ist d_Q injektiv. Daraus folgt der Rest der Behauptung. ■

Es sei bemerkt, daß die Abbildung $g \mapsto \tilde{g}$ bzw. $g \mapsto \hat{g}$ ein Homomorphismus von G in die Gruppe der Algebra-Automorphismen von $S(V)$ bzw. $P(V)$ ist.

Nun beweisen wir mit Hilfe von (C.5) einen wichtigen Satz über die Invarianten der zu einer halbeinfachen Lie-Algebra adjungierten Gruppe.

(C.6) Satz: Seien L eine endlichdimensionale halbeinfache Lie-Algebra über K und $S_{\text{Int}}(L)$ bzw. $P_{\text{Int}}(L)$ die Algebra der Invarianten von $\text{Int}(L)$ (vgl. (C.1)) in $S(L)$ bzw. $P(L)$. Dann gibt es einen Isomorphismus d vom Grade Null von $S(L)$ auf $P(L)$ mit $d(S_{\text{Int}}(L)) = P_{\text{Int}}(L)$.

Bew.: Sei K die Killing-Form von L . Dann ist K nach (C.1)ff und (A.9)ff unter $\text{Int}(L)$ invariant und nach (A.10a) und (A.10)ff nicht entartet. Damit und mit (C.5) ist $d := d_K$ der gesuchte Isomorphismus. ■

Wir bemerken, daß die Abbildung δ die Fortsetzung der Abbildung $\delta: L \rightarrow L^*$ wie in (A.10a) auf $S(L) \rightarrow P(V)$ ist.

Im folgenden erläutern wir die explizite Bestimmung der Abbildung δ für die Anwendungen im Hauptteil. Seien $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von L und $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ die dazu duale Basis in L^* , wobei $n = \dim(L)$ ist. Dann ist $\delta(x_i) = \sum_{j=1}^n K(x_i, x_j) \xi_j$. Damit ist die Abbildung $\delta: S(L) \rightarrow P(L)$ explizit bestimmt. Ist $K = \mathcal{C}$, so kann man δ in einer einfachen Weise angeben: In diesem Fall hat L nach [48; p.147] eine reelle kompakte Form L_u . Seien K bzw. K_u die Killing-Form von L bzw. L_u . Dann gilt nach [48; p.149]: $K_u = K|_{L_u \times L_u}$, so daß K auf $L_u \times L_u$ negativ definit ist. Das Orthonormierungsverfahren liefert dann eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von L_u mit $K(b_i, b_j) = -\delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Diese Basis ist auch eine Basis von L . Sei nun $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ die zu $\{b_1, \dots, b_n\}$ duale Basis von L^* . Dann ist $\delta(b_i) = -\lambda_i$, $1 \leq i \leq n$.

(C.7) Satz: Seien L eine endlichdimensionale komplexe halbeinfache Lie-Algebra, H eine Cartan-Unteralgebra von L , H^* ihr Dualraum und $S_{\text{Int}}(H^*)$ bzw. $P_{\text{Int}}(H^*)$ die Algebra der Invarianten der Weyl-Gruppe $\text{Int}(W^*, H)$ (vgl. (A.13)) in $S(H^*)$ bzw. $P(H^*)$. Dann gibt es einen Isomorphismus vom Grade Null von $S_{\text{Int}}(H^*)$ auf $P_{\text{Int}}(H^*)$.

Bew.: Sei B die nicht entartete Bilinearform auf $H^* \times H^*$ wie in (A.10b). Dann ist wegen (A.13) $\text{Int}(W^*, H) \subseteq \text{Aut}(H^*)$ und B invariant unter $\text{Int}(W^*, H)$. Damit und mit (C.5) ist δ_B der gesuchte Isomorphismus. ■

Wegen (A.15)ff und (B.13d) sind offenbar die Invariantenalgebren $S_{\text{Int}}^\wedge(H)$ bzw. $P_{\text{Int}}^\wedge(H)$ von $\text{Int}(W^*, H)$ isomorph zur $S_{\text{Int}}(H^*)$ bzw. $P_{\text{Int}}(H^*)$ und somit zueinander isomorph. Es gilt sogar:

(C.8) Satz: Es ist $S_{\text{Int}}(H^*) = P_{\text{Int}}^\wedge(H)$.

Bew.: Es ist $P(H) = S(H^*)$. Seien $f \in H^*$ und $\alpha \in W^*$. Dann gilt: $f \circ \hat{S}_\alpha = S_\alpha(f)$ und $S_\alpha^2 = \text{id}_{H^*}$. Daraus folgt für $s \in S_{\text{Int}}(H^*)$: $s \circ \hat{S}_\alpha = \tilde{S}_\alpha(s) \circ \hat{S}_\alpha = s(S_\alpha(\beta_1), \dots, S_\alpha(\beta_1)) \circ \hat{S}_\alpha = s(S_\alpha^2(\beta_1), \dots, S_\alpha^2(\beta_1)) = s$, wobei wir s als ein Polynom in den Elementen einer Basis $\{\beta_1, \dots, \beta_1\}$ von H^* auffassen. Damit ist $S_{\text{Int}}(H^*) \subseteq P_{\text{Int}}^\wedge(H)$. Sei nun $p \in P_{\text{Int}}^\wedge(H)$. Dann gilt: $\tilde{S}_\alpha(p) = \tilde{S}_\alpha(p \circ \hat{S}_\alpha) = \tilde{S}_\alpha(p(\beta_1 \circ \hat{S}_\alpha, \dots, \beta_1 \circ \hat{S}_\alpha)) =$

$= \tilde{S}_{\alpha}(p(S_{\alpha}(\beta_1), \dots, S_{\alpha}(\beta_1))) = p(\tilde{S}_{\alpha}^2(\beta_1), \dots, \tilde{S}_{\alpha}^2(\beta_1)) = p(\beta_1, \dots, \beta_1) = p$. Somit
 ist auch die umgekehrte Inklusion $P_{Int}^{\wedge}(H) \subseteq S_{Int}(H^*)$ bewiesen. ■

Schlußbemerkung

Wir haben für endlichdimensionale komplexe oder reelle halbeinfache Lie-Algebren bewiesen, daß sie jeweils eine algebraisch unabhängige Erzeugendenmenge ihrer Casimir-Elemente von der Mächtigkeit des Ranges der Lie-Algebra besitzen. Danach haben wir gezeigt, wie man aus einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge der Casimir-Elemente einer komplexen halbeinfachen Lie-Algebra analoge Mengen für ihre reellen Formen bzw. ihre Reellifizierung berechnen kann und umgekehrt. Ferner haben wir für die physikalisch bedeutenden Reihen der klassischen Lie-Algebren und G_2 alle Casimir-Elemente angegeben. Eine weitere Aufgabe wäre es, um die Casimir-Elemente aller halbeinfachen Lie-Algebren angeben zu können, nach der Methode (1.20) und dem Kriterium (3.2) Erzeugendenmengen der Casimir-Elemente der restlichen einfachen Ausnahme-Lie-Algebren zu berechnen.

Für eine beliebige Lie-Algebra ist unsere Methode, die insbesondere von den Eigenschaften der Weyl-Gruppe Gebrauch macht, nicht anwendbar; deshalb muß man nach neuen Wegen suchen. Es gibt endlichdimensionale Lie-Algebren, deren Casimir-Elemente keine endliche Erzeugendenmenge besitzen (dies geht aus (1.7a) und der Arbeit [63] hervor, in der eine Gruppe konstruiert wird, deren Invariantenalgebra keine endliche Erzeugendenmenge besitzt. Diese Gruppe ist ein Gegenbeispiel für das vierzehnte Hilbert-Problem). Wie wir es in der Einleitung erläutert haben, liefern die Untersuchungen, die von der dortigen Gleichung (1) ausgehen, zunächst nur die obere Grenze $n-r$ für die Anzahl der algebraisch unabhängigen Casimir-Elemente, die weder für die Erzeugung der Menge der Casimir-Elemente noch für die Darstellungstheorie nach unserer Kenntnis von Bedeutung ist. Diese Zahl ist nach [64; p.138] für halbeinfache Lie-Algebren gleich dem Rang der Lie-Algebra. Damit haben wir für diesen Spezialfall gezeigt, daß die obere Grenze $n-r$ angenommen wird. Wir bemerken, daß die Existenz einer algebraisch unabhängigen Erzeugendenmenge von der Mächtigkeit des Ranges der Lie-Algebra, die wir in (1.11) nachgewiesen haben, für die eindeutige Charakterisierung der endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren von wesentlicher Bedeutung ist. In [40] wird der Begriff der rationalen Invarianten eingeführt. Diese sind die Elemente des Zentrums des Quotientenkörpers der universellen einhüllenden Algebra einer komplexen Lie-Algebra. Es wird dort gezeigt, daß die maximale Zahl der algebraisch unabhängigen rationalen Invarianten einer algebraischen Lie-Algebra gleich $n-r$ ist. Daraus wird für nilpotente Lie-Algebren und Lie-Algebren, deren derivierte Lie-Algebra gleich der Lie-Algebra ist, (damit auch für halbeinfache Lie-Algebren) gefolgert, daß die maximale Zahl ihrer algebraisch unabhängigen Casimir-Elemente gleich $n-r$ ist. Somit wird bei der Lie-

Algebra der Poincaré-Gruppe, deren derivierte Lie-Algebra gleich der Lie-Algebra ist, die maximale Zahl $n-r = 2$ von algebraisch unabhängigen Casimir-Elementen, in Übereinstimmung mit bekannten Ergebnissen, angenommen. In diesem Zusammenhang bleibt noch zu prüfen, welche die allgemeinste Klasse von Lie-Algebren ist, deren maximale Zahl von algebraisch unabhängigen Casimir-Elementen gleich der oberen Grenze $n-r$ ist. Z.B. ist die Lie-Algebra der inhomogenen Galilei-Gruppe (mit Zeittranslationen) algebraisch, aber gehört keiner der zwei oben genannten Klassen von Lie-Algebren an, obwohl sie zwei und somit die der oberen Grenze $n-r$ gleiche Zahl von algebraisch unabhängigen Casimir-Elementen (vgl. [65; p.57]) und nicht nur rationalen Invarianten besitzt.

Es gibt Lie-Algebren, die als Fundamentallösungen des Differentialgleichungssystems (1) der Einleitung transzendente Funktionen besitzen (vgl. [40; example 3]). Deshalb muß der Begriff des Casimir-Elementes nicht nur zu dem einer rationalen Invariante, sondern zum Begriff einer *f o r m a l e n* Invariante erweitert werden, die nach Einführung einer geeigneten Topologie auf der universellen einhüllenden Algebra $U(L)$ einer Lie-Algebra L als das Bild einer Lösung von (1) in $U(L)$ zu definieren wäre. Es muß natürlich auch untersucht werden, ob eine solche Abbildung überhaupt sinnvoll mit Hilfe der sogenannten *S y m m e t r i s i e r u n g*, die in unserem Fall die Bilder explizit zu berechnen erlaubt, zu definieren ist. Ferner muß noch analog zu dem Falle der endlichdimensionalen Darstellungen von komplexen halbeinfachen Lie-Algebren geklärt werden, für welche Darstellungen von Lie-Algebren solche Invarianten eine Bedeutung haben. Sicher kann man eine analoge Aussage für alle Darstellungen einer beliebigen endlichdimensionalen Lie-Algebra nicht bekommen. Denn es gibt für die Physik wichtige Lie-Algebren, die $n-r$ algebraisch unabhängige Casimir-Elemente als eine Erzeugendenmenge des Zentrums der universellen einhüllenden Algebra besitzen, die aber nicht vollständig sind, d.h. deren simultane Eigenwerte die irreduziblen Darstellungen nicht umkehrbar eindeutig charakterisieren. Dazu gehört z.B. die Poincaré-Lie-Algebra (vgl. [66]). Weiter wäre es lohnenswert der Frage nachzugehen, welche Bedeutung die von uns angegebenen Casimir-Elemente der nicht kompakten reellen Formen der komplexen Lie-Algebren für die Klassifikation ihrer unendlichdimensionalen Darstellungen haben, die i.a. noch nicht bekannt sind.

In der Literatur wurde die Behauptung aufgestellt, daß durch Kontraktion von Lie-Algebren Casimir-Elemente wieder in Casimir-Elemente übergehen (vgl. [67; p.74]). So werden z.B. die Casimir-Elemente der Lie-Algebra der komplexen

Poincaré-Gruppe durch Kontraktion der Lie-Algebra $\mathcal{L}(4, \mathbb{C})$ gewonnen. Für die mathematische Rechtfertigung dieser Behauptung haben wir in der Literatur keinen Beweis gefunden. Ein solcher Beweis scheint uns nicht trivial zu sein, da uns keine Untersuchung bekannt ist, die die Wirkung einer Kontraktion von Lie-Algebren auf die jeweiligen universellen einhüllenden Algebren erklärt. Es wäre lohnend nachzuprüfen, ob die obige Behauptung gilt, denn dadurch würde man manche Casimir-Elemente derjenigen Lie-Algebren berechnen können, die wie die Lie-Algebren der Poincaré-Gruppe und der inhomogenen Galilei-Gruppe durch Kontraktion halbeinfacher Lie-Algebren gewonnen werden können (vgl. [20; p.452]).

Da wir Casimir-Elemente einfacher Lie-Algebren berechnet haben und viele Arbeiten sich mit dem zweiten Racah-Problem befassen, die zu dessen Lösung im wesentlichen die Casimir-Elemente der Unter-Lie-Algebren der zu untersuchenden Lie-Algebra benutzen, wäre es eine weitere Aufgabe zu prüfen, ob mit unseren Ergebnissen das genannte Problem für halbeinfache Lie-Algebren vollständig gelöst werden kann; in der Arbeit [68] wird dieses Problem für $SU(3)$ vollständig gelöst und findet sich ein Hinweis zur Verallgemeinerung auf beliebige halbeinfache Lie-Algebren.

In zahlreichen Arbeiten hat man die Eigenwertspektren einiger Casimir-Elemente der klassischen Lie-Algebren für endlichdimensionale Darstellungen berechnet. In den Arbeiten [69] - [74] haben manche Casimir-Elemente die gleiche Form wie die von uns angegebenen (in [71] bzw. [73] werden auf Fehler in [69] bzw. in den Arbeiten [27] aufmerksam gemacht). Wir erwähnen noch die Arbeit [75], in der die Casimir-Elemente aller Unter-Lie-Algebren der Poincaré-Lie-Algebra und der reellen Lie-Algebren von der Dimension kleiner oder gleich vier berechnet sind.

Liste der verwendeten Symbole

$:=$	definitorische Gleichheit
$[a; p.b]$	Hinweis auf Seite b der unter a verzeichneten Literatur
■	Ende eines Beweises
$\{x \in M \dots\}$	Menge aller Elemente von M, für die gilt: ...
$\subseteq$	mengentheoretisches Enthaltensein
$M \setminus N$	alle Elemente der Menge M, die keine Elemente der Menge N sind
M^k	Menge aller k-Tupel von Elementen der Menge M
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ...
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{K}$	Menge der reellen oder komplexen Zahlen
$\bar{\alpha}$	die zu $\alpha \in \mathbb{C}$ konjugiert-komplexe Zahl
$M \rightarrow N, m \mapsto n$	eine auf ganz M definierte Abbildung mit Werten in N, die $m \in M$ auf $n \in N$ abbildet
$f: M \rightarrow N, f(m) := n$	f ist eine auf ganz M definierte Abbildung mit Werten in N und bildet $m \in M$ auf $n \in N$ ab
$f(M) = \{f(m) \in N m \in M\}$	
$f _{M'}$	Einschränkung von Abbildungen, d.h. für $f: M \rightarrow N$ und $M' \subseteq M$ ist $f _{M'}: M' \rightarrow N, f _{M'}(m) := f(m)$
$\circ$	Komposition von Abbildungen
V^*	der algebraische Dualraum zu dem Vektorraum V
M^*, M^t, M^+	die zu der Matrix M konjugiert-komplexe, transponierte, adjungierte Matrix
$\mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$	Polynomialalgebra in n Unbestimmten über $\mathbb{K}$
$\oplus$	direkte Summe von Vektorräumen
$\otimes$	Tensorprodukt von Vektorräumen oder Algebren
$\diamond$	direkte Algebra-Summe
$\text{Aut}(V), \text{Aut}(E)$	die Automorphismengruppe eines Vektorraumes V, einer Algebra E
$\text{card}(M)$	Mächtigkeit einer Menge M
$\text{Der}(E)$	Menge der Derivationen der Algebra E
$\det(M)$	Determinante der Matrix M
$\dim_{\mathbb{K}}(V)$	die Dimension des Vektorraumes V über dem Körper $\mathbb{K}$
E_n	die nxn-Einheitsmatrix
E_{p+q}^q	s. (4.1.1)
$G_2(\mathbb{K})$	s. (4.5.1)
G	s. (4.5.5)

$\mathfrak{L}$	eine Cartan-Unteralgebra von L (vgl. (A.1))
$\mathcal{H}$	s. (3.1)
id_M	identische Abbildung von M auf M
$\text{Im}(\alpha), \alpha \in \mathbb{C}$	Imaginärteil von α
$\overset{B}{\text{Im}}(u)$	s. (2.7)
$\text{Int}(L)$	die zu L adjungierte Gruppe (vgl. (C.1))
$\text{Int}(W^*, H)$	Weyl-Gruppe von L bezüglich H (vgl. (A.13))
$\hat{\text{Int}}(W^*, H)$	s. (A.15)
J_{2n}	s. (4.1.1)
L	eine Lie-Algebra
L_u	eine reelle Form einer komplexen Lie-Algebra (vgl. (2.2))
$M_n(\mathbb{K})$	Menge der $n \times n$ -Matrizen mit Matricelementen aus $\mathbb{K}$
$\nu(2l+1-q, q; \mathbb{K})$	s. (4.2.4)
$\nu(2l-q, q; \mathbb{K})$	s. (4.4.4)
o.E.d.A.	ohne Einschränkung der Allgemeinheit
$P(V)$	Algebra der Polynomfunktionen von dem Vektorraum V (vgl. (B.14))
$P_G(V)$	Menge der Invarianten von der Gruppe G in der Algebra der Polynomfunktionen $P(V)$ von V (vgl. (C.4))
$P_{\text{Int}}^{\wedge}(H)$	Menge der Invarianten von $\hat{\text{Int}}(W^*, H)$ in $P(H)$
$P_{\text{Int}}(L)$	Menge der Invarianten von $\text{Int}(L)$ in $P(L)$.
$\text{Re}(\alpha), \alpha \in \mathbb{C}$	Realteil von α
$\overset{B}{\text{Re}}(u)$	s. (2.7)
$S(V)$	symmetrische Algebra von dem Vektorraum V (vgl. (B.12))
$S_G(V)$	Menge der Invarianten von der Gruppe G in der symmetrischen Algebra $S(V)$ von V (vgl. (C.4))
$S_{\text{Int}}(H^*)$	Menge der Invarianten von $\text{Int}(W^*, H)$ in $S(H^*)$
$S_{\text{Int}}^{\wedge}(H)$	Menge der Invarianten von $\hat{\text{Int}}(W^*, H)$ in $S(H)$
$S_{\text{Int}}(L)$	Menge der Invarianten von $\text{Int}(L)$ in $S(L)$
S_n	symmetrische Gruppe von der Ordnung $n!$
$\mathcal{S}\mathcal{L}(n, \mathbb{K})$	s. (4.1.1)
$\mathcal{S}\mathcal{L}^*(2n)$	s. (4.1.1)
$\mathcal{S}\mathcal{V}^*(2l)$	s. (4.4.4)
$\mathcal{S}\mathcal{Y}(2l, \mathbb{K})$	s. (4.3.1)
$\mathcal{S}\mathcal{Y}(2l-2q, 2q)$	s. (4.3.1)
$\text{spur}(M)$	Spur der Matrix M
$\mathcal{S}\mathcal{U}(n)$	s. (4.1.1)
$\mathcal{S}\mathcal{U}(p, q)$	s. (4.1.1)
$U(L)$	die universelle einhüllende Algebra von L (vgl. (A.5))
$+$	

$U^{\mathbb{C}}$	die Komplexifizierung einer reellen Algebra U (vgl. (1.9))
$U^{\mathbb{R}}$	die Reellifizierung einer komplexen Algebra U (vgl. (2.1))
W^*	die Menge der von Null verschiedenen Wurzeln von H in L (vgl. (A.7))
$Z(L)$	das Zentrum von $U(L)$
$Z^+(L)$	s. (1.6)

Literaturverzeichnis

- 1 FONDA, L., GHIRARDI, G.C.: *Symmetry Principles in Quantum Physics*;
Marcel Dekker, New York 1970
- 2 RACAH, G.: *Nuclear Levels and Casimir-Operator*; in *Farkas Memorial*
Volume, 294 - 304, Jerusalem 1952
- 3 BIEDENHARN, L.C.: *Group Theoretical Approaches to Nuclear Spectroscopy*;
in *Lectures in Theoretical Physics*, Vol.V, 258 - 421; Interscience
Publishers, New York London 1963
- 4 BARGMANN, V., MOSHINSKY, M.: *Group Theory of Harmonic Oscillators*;
Nucl.Phys. 18, 697 - 712 (1960)
- 5 DYSON, F.J.: *Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics*;
W.A. Benjamin, Inc., New York Amsterdam 1966
- 6 LIPKIN, H.J.: *Anwendung von Lieschen Gruppen in der Physik*;
(B.I.-Hochschultaschenbücher 163/163a) Bibliographisches Institut,
Mannheim 1970
- 7 FRANZINI, P., RADICATI, L.A.: *On the Validity of the Supermultiplet*
Model; *Phys.Lett.* 6, 322 - 324 (1963)
- 8 KRAMER, P., MOSHINSKY, M.: *Group Theory of Harmonic Oscillators and*
Nuclear Structure; in *Group Theory and its Applications*, 339 - 468;
Loebl, E.M. (Ed.), Academic Press, New York and London 1968
- 9 MOSHINSKY, M., QUESNE, C.: *Noninvariance Groups in the Second-Quantization*
Picture and Their Applications; *J.Math.Phys.* 11, 1631 - 1639 (1970)
- 10 ROMAN, P.: *Introduction to Quantum Field Theory*; John Wiley and Sons,
Inc., New York 1969
- 11 WIGNEK, E.: *On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group*;
Ann. of Math., 40, 149 - 204 (1939)
- 12 GELL-MANN, M.: *Symmetries of Baryons and Mesons*; *Phys.Rev.* 125, 1067 -
1084 (1962)
- 13 CARRUTHERS, P.: *Introduction to Unitary Symmetry*; Interscience Publishers,
New Aork London Sydney 1966
- 14 PAIS, A.: *Implications of Spin-Unitary Spin Independence*; *Phys.Rev.Lett.* 13,
175 - 177 (1964)

- 15 BEHREND, R.E.: Broken $SU(3)$ as a Particle Symmetry; in *Group Theory and its Applications*, 541 - 629; Loeb, E.M. (Ed.), Academic Press New York and London 1968
- 16 UMEZAWA, M.: Invariant Quantities in Semi-Simple Groups (I); *Nucl.Phys.* 48, 111 - 120 (1963)
- 17 CASIMIR, H.: Über die Konstruktion einer zu den irreduziblen Darstellungen halbeinfacher kontinuierlicher Gruppen gehörigen Differentialgleichung; *Proc.Neder.Akad. van Wet.* 34, 844 - 846 (1931)
- 18 RACA, G.: Group Theory and Spectroscopy; in *Erg. d. exakt.Nat.* 37, 28 - 84, Springer-Verlag, Berlin 1965
- 19 HOLMAN, W.J., III, BIEDENHARN, L.C.: The Representations and Tensor Operators of the Unitary Groups $U(n)$; in *Group Theory and its Applications*, Vol.II, 1 - 73; Loeb, E.M. (Ed.), Academic Press, New York and London 1971
- 20 GILMORE, R.: Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications; John Wiley & Sons, New York London Sydney Toronto 1974
- 21 CASIMIR, H., VAN DER WAERDEN, B.L.: Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen; *Math. Ann.* 111, 1 - 12 (1935)
- 22 MICU, M.: Constructions of Invariants for Simple Lie Groups; *Nucl.Phys.* 60, 353 - 362 (1964)
- 23 UMEZAWA, M.: Invariant Quantities in Semi-Simple Groups (II); *Nucl.Phys.* 53, 54 - 64 (1964)
 - Invariant Quantities in Semi-Simple Groups (III); *Nucl.Phys.* 57, 65 - 88 (1964)
- 24 - Invariant Quantities in Simple Groups B_ω , C_ω and D_ω .I; *Proc.Neder.Akad. van Wet. ser. B* 69, 579 - 591 (1966)
 - Invariant Quantities in Simple Groups B_ω , C_ω and D_ω .II; *Proc.Neder.Akad. van Wet. ser. B* 69, 592 - 606 (1966)
 - Invariant Quantities in Simple Groups B_ω , C_ω and D_ω .III; *Proc.Neder.Akad. van Wet. ser. B* 69, 607 - 619 (1966)
 - Invariant Quantities in Simple Groups B_ω , C_ω and D_ω . IV; *Proc.Neder.Akad. van Wet. ser. B* 69, 620 - 628 (1966)
- 25 BIEDENHARN, L.C.: On the Representations of the Semisimple Lie Groups.
 I. The Explicit Construction of Invariants for the Unimodular

- Unitary Group in N Dimensions; *J.Math.Phys.* 4, 436 - 445 (1963)
- 26 PERELOMOV, A.M., POPOV, V.S.: Casimir Operators for $U(n)$ and $SU(n)$;
Sov.JNP 3, 676 - 680 (1966)
- Casimir Operators for the Orthogonal and Symplectic Groups;
Sov.JNP 3, 819 - 824 (1966)
- The Casimir Operators for the Unitary Group;
Sov.JNP 5, 489 - 491 (1967)
- Eigenvalues of Casimir Operators; *Sov.JNP* 7, 290 - 294 (1968)
- 27 GRUBER, B., O'RAIFEARTAIGH, L.: S Theorem and Construction of the
Invariants of the Semisimple Compact Lie Algebras;
J.Math.Phys. 5, 1796 - 1804 (1964)
- 28 HARISH-CHANDRA: On Representations of Lie-Algebras;
Ann. of Math. Ser.2, 50, 900 - 915 (1949)
- 29 - On some Applications of the Universal Enveloping Algebra of a
Semisimple Lie Algebra; *Trans.Am.Math.Soc.* 70, 28 - 96 (1951)
- 30 - Representations of a Semisimple Lie Group on a Banach Space.I;
Trans.Am.Math.Soc. 75, 185 - 243 (1953)
- 31 BELTRAMETTI, E.G., BLASI, A.: On the Number of Casimir Operators
associated with any Lie Group; *Phys.Lett.* 20, 62 - 64 (1966)
- 32 ANGELOPOULOS, M.E.: Sur les opérateurs de Casimir de toute algèbre de
Lie; *C.R.Acad.Sci.* 264 A, 585 - 586 (1967)
- 33 DICKSON, L.E.: Differential Equations from the Group Standpoint;
Ann. of Math. Ser.2, 25, 287 - 378 (1923 - 24)
- 34 DIXMIER, J.: Algèbres enveloppantes; Gauthier-Villars, Paris Bruxelles
Montreal 1974
- 35 MUTZE, U.: On the Casimir Operators associated with any Lie Algebra;
Z.Phys. 229, 224 - 229 (1969)
- 36 DIXMIER, J.: Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente;
Arch.Math. 10, 321 - 326 (1959)
- 37 RACAH, G.: Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni irriducibili
dei gruppi semisemplici di Lie; *Rend.Lincei* 8, 108 - 112 (1950)
- 38 GELFAND, I.M.: Das Zentrum eines infinitesimalen Gruppenringes;
Mat.Sb. 26, 103 - 112 (1950) (in russisch)

- 39 CHEVALLEY, C.: Invariants of finite Groups generated by Reflections;
Am.J.Math. 77, 778 - 790 (1955)
- 40 ABELLANAS, L., ALONSO, L.M.: A general setting for Casimir invariants;
J.Math.Phys. 16, 1580 - 1584 (1975)
- 41 BERDJIS, F.: Untersuchung der unabhängigen Casimir-Operatoren halbein-
facher Lie-Algebren; Diplomarbeit, Sektion Physik der Universität
München 1972
- 42 MOSHINSKY, M., QUESNE, C.: Generalization to arbitrary Groups of the
Relation between Seniority and Quasispin; Phys.Lett. 29 B, 482 -
484 (1969)
- 43 TODOROV, I.T.: Derivation and Solution of an infinite-component Wave
Equation for the Relativistic Coulomb Problem; in Group Representations
in Mathematics and Physics, 254 - 278; Lecture Notes in Physics 6,
Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1970
- 44 PHILIPS, T.O., WIGNER, E.P.: De Sitter Space and Positive Energy; in
Groups Theory and its Applications, 631 - 676; LoebI, E.M. (Ed),
Academic Press, New York and London 1968
- 45 CHEVALLEY, C.: Théorie des Groupes de Lie; Hermann, Paris 1968
- 46 - The Construction and Study of certain important Algebras;
The Herald Printing Co., Tokyo 1955
- 47 FREUDENTHAL, H., DE VRIES, H.: Linear Lie Groups; Academic Press, New York
and London 1969
- 48 JACOBSON, N.: Lie Algebras; Interscience Publishers, New York London
Sydney 1966
- 49 BOURBAKI, N.: Groupes et Algèbres de Lie, Chapitres 7 et 8; Hermann,
Paris 1975
- 50 SERRE, J.-P.: Lie Algebras and Lie Groups; W.A. Benjamin, Inc., New York
Amsterdam 1965
- 51 BOURBAKI, N.: Algebra I, Chapters 1 - 3; Hermann, Addison-Wesley Publishing
Company, Great Britain 1974
- 52 MEISTER, H.J.: Einführung in die Theorie der topologischen und Lie-Gruppen
(Vorlesungsausarbeitung); Sektion Physik der Universität München 1972
- 53 PERRON, O.: Algebra I; Walter de Gruyter & Co., Berlin 1951

- 54 SCHUR, I.: Vorlesungen über Invariantentheorie; Springer-Verlag, Berlin 1967
- 55 HELGASON, S.: Differential Geometrie and Symmetric Spaces; Academic Press, New York and London 1962
- 56 JACOBSON, N.: Exceptional Lie Algebras; Marcel Dekker, Ins., New York 1971
- 57 HUMPHREYS, J.E.: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory; Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin 1972
- 58 HAUSNER, M., SCHWARTZ, J.T.: Lie Groups. Lie Algebras; Gordon and Breach, New York London Paris 1968
- 59 WARNER, G.: Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I; Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1972
- 60 WEYL, H.: Classical Groups; Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1946
- 61 GREUB, W.H.: Multilinear Algebra; Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1967
- 62 DIEUDONNÉ, J.: Treatise on Analysis Vol. IV; Academic Press, New York and London 1974
- 63 NAGATA, M.: On the 14-th Problem of Hilbert; Amer.J.Math. 81, 766 - 772 (1959)
- 64 MEISTER, H.J.: Einführung in die Theorie der Lie-Gruppen und deren Darstellung im Hilbert-Raum in Hinblick auf Anwendung in der Elementarteilchenphysik (Vorlesungsausarbeitung); Sektion Physik der Universität München 1967
- 65 BRENNICH, H.: Die Induktion von Gruppendarstellungen und ihre Anwendung auf die inhomogene Galilei-Gruppe; Diplomarbeit, Sektion Physik der Universität München 1968
- 66 BARGMANN, V., WIGNER, E.P.: Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations; Proc. Nat. Acad. Sc. 34, 211 - 223 (1946)
- 67 HERMANN, R.: Lie Groups for Physicists; W.A. Benjamin, Inc., New York Amsterdam 1966
- 68 JUDD, B.R., MILLER JR., W., PATERA, J., WINTERITZ, P.: Complete sets of commuting operators and $O(3)$ scalars in the enveloping algebra of $SU(3)$; J.Math.Phys. 15, 1787 - 1799 (1974)

- 69 GILMORE, R.: Spectrum of Casimir Invariants for the Simple Classical Lie Groups; *J.Math.Phys.* 11, 1855 - 1856 (1970)
- 70 HUDSON, R.L.: A new system of Casimir operators for $U(n)$; *J.Math.Phys.* 15, 1067 - 1070 (1974)
- 71 WONG, M.K.F., HSING-YANG YEH: Eigenvalues of the invariant operators of the orthogonal and symplectic groups; *J.Math.Phys.* 16, 1239 - 1243 (1975)
- 72 SUSUMU OKUBO: Algebraic identities among $U(n)$ infinitesimal generators; *J.Math.Phys.* 16, 528 - 535 (1975)
- 73 AGUILERA-NAVARRO, M.C.K., AGUILERA-NAVARRO, V.C.: Eigenvalues of invariants of $U(n)$ and $SU(n)$; *J.Math.Phys.* 17, 1173 - 1176 (1976)
- 74 NWACHUKU, C.O., RASHID, M.A.: Eigenvalues of the Casimir operators of the orthogonal and symplectic groups; *J.Math.Phys.* 17, 1611 - 1616 (1976)
- 75 PATERA, J., SCHARP, R.T., WINTERNITZ, P., ZASSENHAUS, H.: Casimir operators of Subalgebras of the Poincare Lie Algebra and of real Lie Algebras of low Dimension; in *Group Theoretical Methods in Physics*, 500 - 515; *Lecture Notes in Physics* 50, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1976
- 76 GAUGER, M.A.: Some Remarks on the Center of the Universal Enveloping Algebra of a Classical Simple Lie Algebra; *Pac.J.Math.* 62, 93 - 97 (1976)

Lebenslauf

Am 4. Februar 1943 wurde ich in Soleymanieh, Kurdistan, als das sechste Kind des Apothekers und späteren Kaufmanns Mozaffar Berdjis und dessen Ehefrau Monire, geborene Sadjed, geboren. Im gleichen Jahr kehrten meine Eltern in ihr Heimatland Iran zurück. In Teheran besuchte ich die Volksschule vom September 1949 bis Mai 1955. Im Oktober 1955 übersiedelte meine ganze Familie nach Wien, wo ich bis Juni 1962 das Gymnasium besuchte und mit der Matura abschloß. Im Wintersemester 1962/63 begann ich in München an der Ludwig-Maximilians-Universität mit dem Physikstudium, das ich im Juli 1972 mit der Diplom-Hauptprüfung abschloß. Im März 1972 heiratete ich Farideh Vafaie und im August 1974 wurde mein Sohn Vahid geboren. Im Oktober 1972 begann ich unter der wissenschaftlichen Leitung von Herrn Professor Dr. H.J. Meister am Lehrstuhl Prof. Dr. F. Bopp der Sektion Physik mit den Untersuchungen zur vorliegenden Dissertation.

